# Matemática

**Tercer Nivel** 

Educación Báscica para personas jóvenes y adultas

Texto Cuaderno para el Estudiante

Edición especial para el Ministerio de Educación.

Prohibida su comercialización. Año 2012.

GRUPO EDITORIAL

norma



Edición especial para el Ministerio de Educación.

Prohibida su comercialización. Año 2012.

GRUPO EDITORIAL **NORM** 













# MINEDUC







#### GRUPO EDITORIAL NORMA Textos Escolares

#### **Dirección Editorial**

Verónica Jiménez Dotte

#### Edición

Carmen Muñoz Droguett

#### Dirección de Arte

Job López Góngora

#### Diseño y Diagramación

Graciela Ellicker Sergio Pérez Jara

#### **Ilustraciones**

Sebastián Lagunas

#### **Fotografías**

Archivo editorial

#### **Autores**

Gabriel González Cartagena Cecilia Donoso Concha

#### **Edición Actualizada**

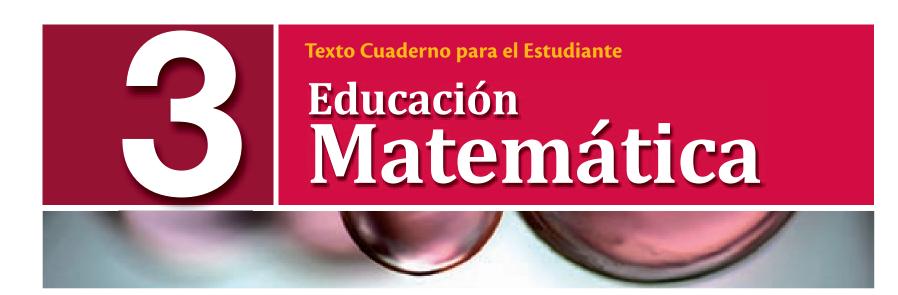
Educación Matemática Tercer Nivel. Educación Básica para personas jóvenes y adultas. Texto del Estudiante. La materialidad y fabricación de este texto está certificada por el IDIEM – Universidad de Chile.

© Editorial Norma de Chile S. A.
Monjitas 527, piso 17, Santiago, Chile.
Teléfono: 731 7500 Fax: 632 2079
e-mail: ventasnorma@carvajal.cl
Registro de Propiedad Intelectual N° 209895
Libro chileno de edición especial para el Ministerio de Educación.
Impreso en RR Donnelley.
Año impresión 2012









## **Tercer Nivel**

Educación Básica para personas jóvenes y adultas

#### **Autores Educación Matemática**

Gabriel González Cartagena

Profesor de Educación General Básica Mención Matemática Licenciado en Educación Universidad de Atacama

#### Cecilia Donoso Concha

Doctora en Ciencias Mención Matemática Universidad de Chile





## ÍNDICE

Estructura Texto Cuaderno para el Estudiante	. 7
Módulo 1	
Ampliando el conocimiento de los números	9
Unidad 1: Multiplicación y división de números decimales	. 10
Multiplicación de números decimales	
Procedimiento para multiplicar números decimales	
Estrategias de cálculo	. 14
¿Qué sucede cuando multiplicamos por factores menores que 1?	
Multiplicación de un número decimal por una potencia de 10	
División de números decimales	
División de un número decimal por potencias de 10	
División con divisor decimal menor a 1	
Propiedades de la multiplicación de números decimales	27
Aplicando las propiedades de la multiplicación de números decimales en el cáculo mental	
Propiedades de la división de números decimales	
Evaluación	29
Unidad 2: Números positivos y negativos	
Números enteros	
Números enteros y temperaturas	
Aplicación de los números enteros en la vida diaria	
Números enteros en las finanzas	
Valor absoluto de un número entero	
Adición de números enteros	
Sustracción de números enteros	
Sustracción con números negativos	
Sustracción con sustraendo mayor que el minuendo	
Multiplicación de números enteros	
Multiplicación de enteros de igual signo	
Propiedad conmutativa	
Propiedad dsitributiva de la multiplicación respecto de la adición	
División de números enteros	
De distinto signo	
De igual signo	
Evaluación	49
Unidad 3: Potencias	51
Representando potencias	
Potencias de otras bases	
¿Qué sucede con las potencias de exponente 1 y 0?	
Expresión de cantidades aplicando potencias de 10	
Notación Científica	
Glóbulos rojos y notación científica	
Evaluación	64
Síntesis Módulo 1	. 66



#### Módulo 2

Razones porcentajes y proporciones	67
Unidad 1: Razones y porcentajes	
Comparación por diferencia	
Comparación por cuociente. Razones	
Representando razones	
Razones y Porcentajes	
Interpretando porcentajes	
Cálculo de porcentaje	
Porcentajes en el comercio	
Porcentaje que representa una cantidad respecto de otra	81
Un famoso porcentaje: el IVA	83
Evaluación	85
Weil-10 Weil-in-communication	0.7
Unidad 2: Variaciones proporcionales	
Estableciendo relaciones entre dos variables	
¿Todas las variables cumplen alguna relación?	
Relaciones proporcionales	
Relación proporcional directa	
Otras variables que cumplen una relación proporcional	
La U.F. (Unidad de Fomento)	
Cálculo del término desconocido en una proporción directa	
Relación proporcional inversa	
Aplicando proporcionalidad directa	
Dibujos a escala	
Evaluación	
Sintesis Modulo 2	108
Módulo 3	
Temas de geometría	109
_	
Unidad 1: Teoremas geométricos	
Algunos conceptos básicos de geometría	
Medida de ángulos	
Suplemento de un ángulo	
Rectas paralelas cortadas por una transversal	
Ángulos consecutivos	
Complemento de un ángulo $lpha$ Ángulos interiores de un triángulo	
Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo	
Aplicación del teorema de Pitágoras Teorema de Pitágoras recíproco	
reorema de Pitagoras reciproco	
LYAIUACIVII	





	127
	129
	133
Volumen del cilindro	137
<b>Evaluación</b> 1	140
Síntesis Módulo 3	142
Módulo 4	
Tratamiento de información1	143
7 B- 4	144
Interpretación y lectura de información	146
Gráficos Circulares	152
Construcción de gráficos circulares	153
Comparación de gráficos	156
<b>Evaluación</b>	161
Unidad 2: Medidas de tendencia central	163
Medidas de tendencia central	165
Frecuencia absoluta	166
Promedio o Media aritmética	167
Moda	169
Mediana	172
Valores de la variable1	174
<b>Evaluación</b>	177
	180





#### ESTRUCTURA TEXTO CUADERNO PARA EL ESTUDIANTE

**Módulo:** el texto se compone de 4 módulos, cada uno está dividido en 2 o 3 unidades. Los módulos se estructuran según una matriz temática.



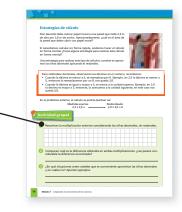
#### Cada unidad contiene las siguientes secciones:

**Entrada de Unidad:** portadilla que muestra el título, una fotografía alusiva y los aprendizajes esperados de cada unidad.



Aprendizajes esperados: este recuadro contiene los aprendizajes que obtendrán las y los estudiantes en esta unidad.

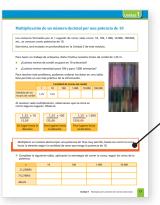
Actividad grupal: esta sección ha sido diseñada para indagar en los conocimientos de los y las estudiantes.



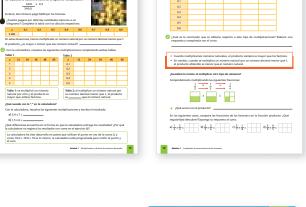




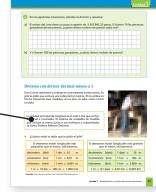
Actividades: en esta sección se plantean ejercicios y preguntas individuales acerca de los contenidos tratados. Van señaladas con números.



Recuadro de concepto: en el que se formaliza un concepto o contenido importante.



Recuadro informativo: en el que se destacan aspectos que se deben recordar y considerar.



Program deligne, et la miligilization de consens destinal memors que 1, et justi qui la la miligilization de la manufactura de la miligilization de la manufactura de la miligilization de la manufactura de consensation de la miligilization d

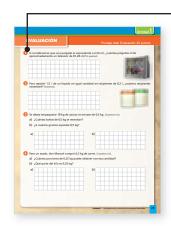
Cajón link: recuadro que indica un sitio web donde podrá ejercitar, repasar o profundizar las materias tratadas.

**Evaluación:** sección en que pondrá a prueba lo que ha aprendido en cada unidad.



Síntesis módulo:

Presenta un esquema con los contenidos tratados en las unidades de cada módulo.





8



# Módulo



# Ampliando el conocimiento de los números

Multiplicación y división de números decimales

Unidad 7

Números positivos y negativos

Unidad 3

**Potencias** 

9



Unidad 1

# Multiplicación y división de números decimales





### La Luna, un gran misterio para la humanidad

El ser humano ha podido viajar hasta la Luna, lo que ha permitido conocer muchas cosas acerca de ella.

En el mes de julio de 1969, un hombre logró por primera vez alcanzar la superficie lunar. La nave Apolo se posó en la superficie y el astronauta Neil Armstrong, pudo caminar por la Luna.

En este viaje, la nave espacial demoró cuatro días en alcanzar la órbita de la Luna, en el retorno a la Tierra se demoró casi tres días.

Desde 1969 se han producido varios alunizajes más y los astronautas se han paseado por la superficie lunar. Pero, a pesar de los viajes que el hombre ha hecho, la Luna sigue siendo un misterio.

#### ¿Hay fuerza de gravedad en la Luna?

Sí, y como este satélite es más pequeño que la Tierra, la fuerza de gravedad también es menor. La fuerza de gravedad lunar equivale, aproximadamente, a una sexta parte de la gravedad de la Tierra.

Fuente: La Enciclopedia De Carlitos: El Espacio, editorial Ercilla.



- Si una persona pesa 73,8 kg en la Tierra, ¿cuántos kilos pesará en la Luna?
- Si en la Luna una persona pesa 9,5 kg, ¿cuántos kilos pesa en la Tierra?
- ¿Qué operaciones matemáticas nos permiten encontrar las respuestas a las preguntas anteriores?

En esta unidad, estudiaremos la multiplicación y la división de números decimales, para responder preguntas como las anteriores y muchas más.



#### Multiplicación de números decimales

#### El taller de costuras

La señora Marta necesita fabricar ocho cortinas para la sala de la escuela. Ella tiene un trozo de tela que mide 8,6 m de ancho y 3 m de alto.

Si cada cortina mide 1,45 m de ancho por 2 m de alto, ¿cuánta tela necesita para las ocho cortinas? ¿Le alcanzará con el trozo de tela que tiene?



Primero, calcularemos cuánto mide el área del trozo de tela que tiene.





De acuerdo a sus medidas, el trozo de tela tiene forma rectangular. Entonces, para calcular su área multiplicamos las dos medidas (el ancho por el alto).

Al plantear la multiplicación nos encontramos con que hay números decimales. Recordemos que:

Parte entera 
$$\leftarrow$$
 8 , 6  $\rightarrow$  Parte decimal

Módulo 1 Ampliando el conocimiento de los números

¿Cómo se resolverá este tipo de multiplicaciones?

#### Procedimiento para multiplicar números decimales

$$\frac{8,6}{25,8}$$
 x 3 =

- 1º Multiplicamos como sabemos hacerlo. Es decir, como si fueran solamente números naturales.
- 2º Expresaremos el producto final, con decimales.

En el producto final o resultado, se separan las cifras decimales colocando la coma. Para ello, se cuenta de derecha a izquierda tantas cifras decimales como tengan los factores (números que se están multiplicando). En este caso, en los factores hay solo una cifra decimal, por lo tanto, el resultado obtenido es 25,8.

• ¿Qué diferencia encuentra entre multiplicar números naturales y multiplicar números decimales? Elabore una respuesta y compártala con su curso.



Sigamos con el problema de la señora Marta.

Ya sabemos que el trozo de tela mide 25,8 metros.

Ahora, tenemos que calcular la cantidad de tela que se necesita en cada cortina. Para saberlo, planteamos la multiplicación con las medidas de la cortina:

En ella, observamos que en uno de los factores hay dos cifras decimales.

El procedimiento para multiplicar es el mismo. Multiplicamos como si fueran números naturales.



En el producto final separamos, de derecha a izquierda, dos cifras decimales.

Ya sabemos la cantidad de tela que tiene la señora Marta y también hemos calculado que cada cortina mide 2,9 m. Nos falta saber la cantidad de tela que necesita en ocho cortinas.

Como usted ya sabe multiplicar números decimales, podrá resolver y responder esta pregunta.

Plantee y resuelva la multiplicación correspondiente al cálculo de la cantidad de tela que se necesita en las ocho cortinas. ¿Le alcanza la tela para todas las cortinas?



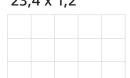
Apliquemos lo aprendido, en los siguientes ejercicios:

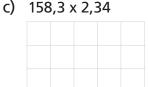


01 Mat3 M1 U1.indd 13



b) 23,4 x 1,2





d) 1.342 x 1,26

Unidad 1 Multiplicación y división de números decimales



¿En qué se diferencian los ejercicios a) y d) de los ejercicios b) y c)?

Efectivamente, en los ejercicios b) y c) hay cifras decimales en ambos factores. En ese caso, se procede igual, pero teniendo la precaución de considerar todas las cifras decimales que tienen los factores para separar la parte entera de la parte decimal en el producto.

Cuando tenemos cifras decimales en uno o ambos factores, multiplicamos como si fueran números naturales y en el resultado separamos, de derecha a izquierda, con una coma tantas cifras decimales como tengan los factores.



#### Estrategias de cálculo

Don Gerardo debe colocar papel mural a una pared que mide 2,3 m de alto por 2,9 m de ancho. Aproximadamente, ¿cuál es el área de la pared que debe cubrir con papel mural?

Si necesitamos calcular en forma rápida, podemos hacer el cálculo en forma mental. ¿Tiene alguna estrategia para resolver este cálculo en forma mental?

Una estrategia para realizar este tipo de cálculos, consiste en aproximar las cifras decimales aplicando el redondeo.



Para redondear decimales, observamos las décimas en el número, recordemos:

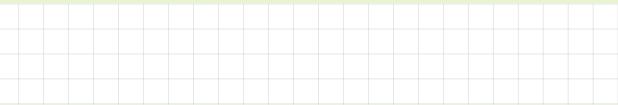
- Cuando la décima es menor a 5, se reemplaza por 0. Ejemplo: en 2,3 la décima es menor a 5, entonces la reemplazamos por un 0, nos queda 2,0.
- Cuando la décima es igual o mayor a 5, se acerca a la unidad superior. Ejemplo: en 2,9 la décima es mayor a 5, entonces, la acercamos a la unidad siguiente, en este caso nos queda 3,0.

En el problema anterior, el cálculo se podría plantear así:

Medidas exactas Redondeado 
$$2,3 \times 2,9 =$$
  $2,0 \times 3,0 = 6$ 

## Actividad grupal

1 Resuelvan la multiplicación anterior considerando las cifras decimales, sin redondeo.



- 2 Comparen cuál es la diferencia obtenida en ambas multiplicaciones. ¿Les parece considerable la diferencia encontrada?
- ¿En qué situaciones creen ustedes que es conveniente aproximar las cifras decimales y en cuáles no? Aporten ejemplos.

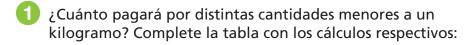


#### ¿Qué sucede cuando multiplicamos por factores menores que 1?

Don Octavio compra 0,5 kg de limones. Si el kilo de limones cuesta \$680, ¿cuánto debe pagar por esa compra?

La respuesta se obtiene a través de la siguiente multiplicación:

Es decir, don Octavio pagó \$340 por los limones.





x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
\$ 680								

En estas situaciones, hemos multiplicado un número natural por un número decimal menor que 1.

El producto, ¿es mayor o menor que ese número natural?

2 Con la calculadora, resuelva las siguientes multiplicaciones completando ambas tablas.

Tabla 1

X	12	24	36	48	60
1					
2					
3					
4					
5					

**Tabla 1:** se multiplicó un número natural por otro y el producto es mayor que ambos factores.

Tabla 2

x	12	24	36	48	60
0,1					
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					

**Tabla 2:** al multiplicar un número natural por un número decimal menor que 1, el producto es \_\_\_\_\_\_ que el número natural.

#### ¿Qué sucede con la "," en la calculadora?

Con la calculadora, resuelva las siguientes multiplicaciones y escriba el resultado:

¿Qué diferencias encuentra en la forma en que la calculadora entrega los resultados? ¿Por qué la calculadora no registra los resultados con coma en el ejercicio b)?

La calculadora ha sido desarrolla en países que utilizan el punto en vez de la coma (,) y como 10.0 = 10.0 = 10 es lo mismo, la calculadora está programada para omitir el punto y el cero.

**Unidad 1** Multiplicación y división de números decimales



#### ¿Qué ocurre con el producto cuando ambos factores son cifras decimales?

Con la calculadora, complete la tabla con los productos respectivos:

Х	1,2	2,4	3,6	4,8	6,7
0,1					
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					
0,6					

- ¿Cuál es la conclusión que se obtiene respecto a este tipo de multiplicaciones? Elabore una respuesta y compártala con el curso.
  - Cuando multiplicamos números naturales, el producto siempre es mayor que los factores.
  - En cambio, cuando se multiplica un número natural por un número decimal menor que 1, el producto obtenido es menor que el número natural.

#### ¿Sucederá lo mismo al multiplicar otro tipo de números?

Comprobémoslo multiplicando las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

¿Qué ocurre con el producto?

En los siguientes casos, compare las fracciones de los factores con la fracción producto. ¿Qué regularidad descubre? Exponga su respuesta al curso.

a) 
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$$

b) 
$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} =$$

b) 
$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} =$$
 c)  $\frac{3}{7} \times \frac{1}{8} =$  d)  $\frac{5}{9} \times \frac{4}{5} =$ 

d) 
$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{5} =$$



#### Multiplicación de un número decimal por una potencia de 10

Los números formados por el 1 seguido de ceros, tales como: 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, etc., se conocen como potencias de 10.

Este tema, será tratado en profundidad en la Unidad 3 de este módulo.

Para hacer un trabajo de artesanía, doña Cristina necesita trozos de cordel de 1,25 m.

- ¿Cuántos metros de cordel ocupará en 10 artesanías?
- ¿Cuántos metros necesitará para 100 y para 1.000 artesanías?

Para resolver este problema, podemos ordenar los datos en una tabla. Esto permite un uso más práctico de la información.

	Cantidad de trozos de cordel					
	1	10	100	1.000	10.000	100.000
Medida de los trozos de cordel	1,25	12,5				



Al resolver cada multiplicación, observamos que la coma se corrió algunos lugares. Observe:

Un lugar hacia la derecha

Dos lugares hacia la derecha

Tres lugares hacia la derecha

Multiplicar un número decimal por una potencia de 10 es muy sencillo, basta con correr la coma hacia la derecha según la cantidad de ceros que tenga la potencia de 10.

• Complete la siguiente tabla, aplicando la estrategia de correr la coma, según los ceros de la potencia.

X	10	100	1.000	10.000
21,256893				
712,78956				
284,35				





Junto a sus compañeros y compañeras, resuelvan los siguientes problemas, aplicando lo aprendido. Es conveniente realizar todos los pasos y organizar adecuadamente la información que se entrega.

La siguiente información apareció en un diario y se refiere al consumo promedio de pescado por persona en un año:

## ¿Cuánto pescado consumimos al año?



Chile = 4,7 kg/año

España = 37,1 kg/año

Japón = 72 kg/año

Calcule el consumo anual, promedio, de 1.000 personas en cada uno de estos países.

Chile

España

Japón

2

El viernes pasado la UF estaba a \$24.564,36. El arriendo de un departamento cuesta 6,5 UF. ¿Cuál es el valor del arriendo, en pesos?

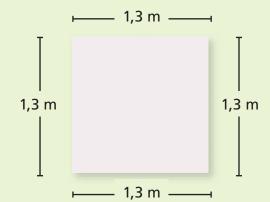


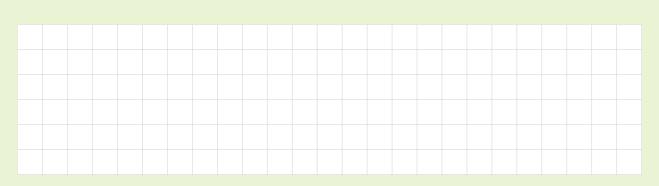
3 El precio del dólar, el viernes estaba a \$480,17. ¿Cuántos pesos chilenos obtendría por 100 dólares?





4 El lado de este cuadrado mide 1,3 metros. ¿Cuánto medirá su perímetro?





Podemos decir que, en la multiplicación de números decimales menores que 1, al igual que la multiplicación de fracciones, el producto es menor que los factores.

(a)

El siguiente sitio web te acompaña, paso a paso, en la resolución de multiplicaciones con decimales.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/decimales-multiplicar.html



#### División de números decimales

Tengo una plancha de madera de 12,6 m de largo que debo dividir en 3 partes iguales para hacer unos paneles. ¿Qué medida tendrá cada panel?

- 1° Se divide la parte entera, en este caso 12.
- 2º Se coloca la coma en el cuociente y se continúa dividiendo hasta la última cifra. Observe:

12, 
$$6: 3 = 4$$
,  $\longrightarrow$  12,  $6: 3 = 4, 2$   
0 0 6 0//

Por lo tanto, la medida que tendrá cada panel es de 4,2 m.

1 Resuelva de acuerdo al procedimiento indicado:





c) 
$$15,9:3=$$







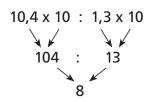


Cuando tenemos números decimales en el divisor, el procedimiento varía.

Por ejemplo: 10,4:1,3=?

En este caso, se debe amplificar el dividendo y el divisor por una potencia de 10 según la cantidad de cifras decimales que tenga el divisor, es decir, multiplicamos a ambos lados de la división por la potencia de 10 que corresponda.

Se amplifica por 10.



Se corrió la coma un lugar a la derecha en el dividendo y en el divisor.



Se amplifica por 100.



Se corrió la coma dos lugares a la derecha en el dividendo y en el divisor.

Resuelva las siguientes divisiones de acuerdo al procedimiento anterior:



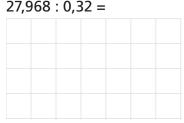




d) 
$$25,5:1,7=$$







¿En qué se diferencia la división de números decimales con la división de números naturales?

#### División de un número decimal por potencias de 10

10 amigos deben repartirse en partes iguales el dinero ahorrado en el banco. Si la cantidad ahorrada asciende a \$16 U.F., ¿cuánto dinero le corresponderá a cada uno de los 10 amigos? (El valor de la UF que hemos considerado es \$21.785,54).



La división asociada a este problema sería 348.568,54 : 10

De acuerdo a lo estudiado, dividimos la parte entera y al llegar a la parte decimal escribimos la coma en el cuociente y continuamos dividiendo como en los números naturales.

Resuelva las siguientes divisiones según este procedimiento:

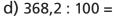




c) 
$$245,6:100 =$$





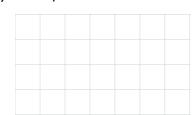




e) 1.458,63 : 1.000 =



f) 2.478,961 : 1.000 =



Pero, ¿existirá un procedimiento que nos permita resolver este tipo de ejercicios de manera más rápida?

Al resolver la división del dinero entre los 10 amigos, comprobamos que cada uno recibe:

348.568,54 : 10 = 34.856,854



Al dividir en 10, comprobamos que la coma se ha desplazado un lugar hacia la izquierda.

¿Y si lo dividieran entre 100 personas?

348.568,54 : 100 = 3.485,6854



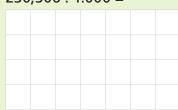
Al dividir en 100, comprobamos que la coma se ha desplazado dos lugares hacia la izquierda.

Al dividir un número decimal por una potencia de 10, basta con desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10.

## Actividad grupal

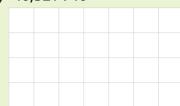
Resuelvan los siguientes ejercicios aplicando el procedimiento de desplazar la coma y luego comprueben con la calculadora.

a) 230,306 : 1.000 =



d) 7.894,5621 : 10.000 =





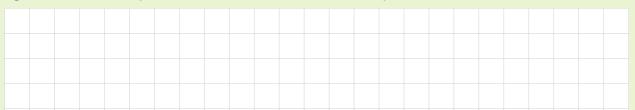
e) 4,32 : 100 =



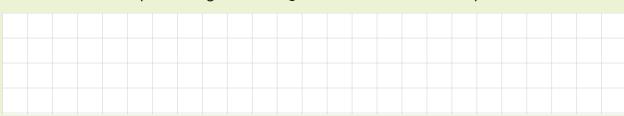
f) 26,48 : 1.000 =



- 2 En las siguientes situaciones, plantee la división y resuelva:
- a) El sorteo del Loto tiene un pozo a repartir de 5.457.843,25 pesos. Si fueron 10 las personas ganadoras de ese premio, ¿cuánto dinero reciben de premio cada una?



b) Y si fueran 100 las personas ganadoras, ¿cuánto dinero reciben de premio?



#### División con divisor decimal menor a 1

Don Luis es carpintero y trabaja en una empresa constructora. Su jefe le pidió que cortara una tabla de 0,2 metros. Él no utiliza en forma frecuente esas medidas, así es que no sabe como cortar la tabla.

La unidad principal de longitud es el metro (m) que es fijo, universal e invariable. El sistema de unidades de medida que incluye al metro junto a sus múltiplos y submúltiplos se llama Sistema Métrico Decimal.



• ¿Cuánto mide la tabla que le pidió el jefe?

	Si deseamos medir longitudes más pequeñas que el metro, utilizaremos:				
decímetro (dm)	1 dm = 0,1 m				
centímetro (cm)	1 cm = 0,01 m				
milímetro (mm)	1 mm = 0,001 m				
1 m = 10 dm = 100 cm = 1.000 mm					

Fuente: http://www.escolar.com/matem/20medlong.htm

Si deseamos medir longitudes más grandes
que el metro, utilizaremos:

decámetro (dam)	1 dam = 10 m			
hectómetro (hm)	1 hm = 100 m			
kilómetro (km)	1 km = 1.000 m			
1 m = 0,1 dam = 0,01 hm = 0,001 km				

08-10-12 12:32



Los submúltiplos del metro que más se usan son el decímetro (0,1 m), el centímetro (0,01 m) y el milímetro (0,001 m).

- Una tabla que tiene 2 m de longitud, ¿a cuántos decímetros equivale? Resolvamos con ayuda de la calculadora:
- a) Como un decímetro corresponde a 0,1, planteamos la división 2 : 0,1 =
- b) La longitud de esa misma tabla, ¿a cuántos centímetros equivale? \_\_\_\_\_\_
- c) ¿Y a cuántos milímetros?

# Actividad grupal

Con la ayuda de la calculadora resuelvan las siguientes divisiones:

:	0,1	0,01	0,001
125			
200			
300			
500			

Observemos los cuocientes obtenidos:

- a) ¿Qué sucede cuando dividimos por 0,1?\_\_\_\_\_
- b) ¿Y cuando dividimos por 0,01?\_\_\_\_\_
- Escriban Verdadero (V) o Falso (F) en las siguientes afirmaciones:
- a) \_\_\_\_\_ Dividir por 0,1 equivale a multiplicar por 10.
- b) \_\_\_\_\_ Dividir por 0,01 equivale a multiplicar por 100.
- c) \_\_\_\_\_ Dividir por 0,001 equivale a multiplicar por 1.000.
- Planteen la división correspondiente y expresen en decímetros, centímetros y milímetros, las siguientes medidas:

	3 metros	10 metros	25 metros
Decímetros			
Centímetros			
Milímetros			



#### Las empanadas de don Pedro

Don Pedro tiene una fábrica de empanadas de horno. Para este día, tiene un pedido de 25 empanadas y para su elaboración dispone de 4,5 kg de relleno y a cada empanada le pone 0,25 kg de relleno.

- ¿Para cuántas empanadas le alcanzan los 4,5 kg de relleno?
- Con los ingredientes que dispone, ¿puede completar el pedido de las 20 empanadas?
- ¿Qué cálculo podríamos realizar para encontrar las respuestas a estas interrogantes?



Representemos gráficamente la situación:













Un cuadro representa 1 kilo de relleno y la mitad del cuadro representa la mitad de un kilo.

Si 1 cuadro corresponde a un kilo de relleno, con un kilo puede preparar 4 empanadas.











Gráficamente, vemos que se ha realizado una división y el relleno le alcanza para 18 empanadas.

Entonces, la división que nos permite encontrar la respuesta a esta situación es la siguiente:

4,5 : 0,25 =

Resuelva con la calculadora y escriba el resultado obtenido. Junto con su curso, elabore una respuesta para cada pregunta planteada al inicio de esta página.

Si don Pedro dispusiera de 5,5 kg, de relleno, ¿alcanza a completar su pedido de las 25 empanadas?

Plantee la división correspondiente y resuelva. ¿Cuál es la cantidad de relleno que debe tener para preparar las 25 empanadas? Compruebe con la calculadora.





# Actividad grupal

- Resuelvan las divisiones que aparecen en la tabla, planteando la equivalencia de las cantidades.
- 2 En la calculadora, digiten la división original y comprueben ese resultado con el obtenido en el punto 1.

División	División equivalente	Cuociente	Resultado con calculadora
2,5 \( \ell \) : 0,5 \( \ell \) =			
9,2 kg : 0,3 kg =			
3,2 m : 0,4 m =			
2,7 m : 0,3 m =			
1,6 \( \ell \) : 0,2 \( \ell \) =			
3,5 kg : 0,25 kg =			

3 Expongan sus resultados y, junto a los otros grupos, saquen algunas conclusiones.



#### Propiedades de la multiplicación de números decimales

En los números decimales, se cumplen ciertas propiedades, al igual que en los números naturales.

Con la calculadora, resuelva las multiplicaciones y complete cada tabla:

#### **Propiedad conmutativa**

Multiplicación	Producto	Multiplicación	Producto	Propiedad
2,4 x 1,2 =	2,88	1,2 x 2,4 =	2,88	Conmutativa
3,8 x 2,6 =		2,6 x 3,8 =		
0,23 x 4,5 =				

Como también ocurre en los números naturales, en la multiplicación de números decimales el orden de los factores no altera el producto.

#### **Propiedad asociativa**

Multiplicación	Producto	Multiplicación	Producto	Propiedad
(2,4 x 1,2) x 2,3 = 2,88 x 2,3 =	6,624	2,4 x (1,2 x 2,3) = 2,4 x 2,76 =	6,624	Asociativa
$(3,8 \times 2,6) \times 0,5 =$		2,6 x 3,8 =		
$(0,23 \times 4,5) \times 0,8 =$				

Podemos asociar de distinta forma los factores y el producto es el mismo.

#### Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Para resolver la multiplicación 6,124 x 8, la podemos plantear descomponiendo aditivamente el número decimal y multiplicamos cada parte por el número natural. Observe:

$$(6 + 0.124) \times 8 = (6 \times 8) + (0.124 \times 8)$$
  
 $48 + 0.992$   
 $48.992$ 

Para multiplicar una suma con decimales por un número natural, se multiplica cada sumando por dicho número y luego se suman los productos parciales.

Unidad 1 Multiplicación y división de números decimales



Las propiedades de la multiplicación nos permiten calcular mentalmente el producto de un número natural por números decimales. Por ejemplo:

- Si tenemos que calcular el producto 8 x 1,345, planteado de esta manera nos resulta un poco complicado, pero si aplicamos la propiedad conmutativa, tendremos: 1,345 x 8, lo que simplifica su cálculo.
- Al calcular en forma rápida el producto de 6 x 3,2, aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición descomponiendo el número decimal y planteamos:

$$(6 \times 3) + (6 \times 0,2) = 18 + 1,2 = 19,2$$

• El 1 es el neutro en la multiplicación; es decir, al multiplicar un número cualquiera por 1, el resultado es el mismo número. Ejemplo:

$$208,98 \times 1 = 208,98$$

#### Propiedades de la división de números decimales

La división de números decimales ¿cumple la propiedad conmutativa?

Si tenemos la división:

12,3 : 3, ¿será lo mismo que dividir 3 : 12,3?

Resuelva las siguientes divisiones, puede utilizar su calculadora.

La división de números decimales, ¿cumple la propiedad conmutativa?

La división de números decimales ¿cumple la propiedad asociativa?

¿Se obtiene el mismo cuociente al resolver: (12,6 : 3) : 2 que 12,6 : (3 : 2)? Elabore una respuesta y compartala con su curso.

De acuerdo a la propiedad asociativa, resuelva las siguientes divisiones:

La división de números decimales, ¿cumple la propiedad conmutativa?

Al igual que en la división de números naturales, en la división de números decimales no se cumplen las propiedades conmutativa ni asociativa.



#### **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 32 puntos

Si consideramos que una pulgada es equivalente a 2,54 cm, ¿cuántas pulgadas mide aproximadamente un televisor de 81,28 cm? (4 puntos).



Para repartir 1,5  $\ell$  de un líquido en igual cantidad en recipientes de 0,3  $\ell$ , ¿cuántos recipientes necesitaré? (4 puntos).





- 3 Se desea empaquetar 18 kg de azúcar en envase de 0,5 kg. (2 puntos c/u).
  - a) ¿Cuántas bolsas de 0,5 kg se necesitan?
  - b) ¿A cuántos gramos equivale 0,5 kg?





- 4 Para un asado, don Manuel compró 6,5 kg de carne. (2 puntos c/u).
  - a) ¿Cuántas porciones de 0,25 kg puede obtener con esa cantidad?
  - b) ¿Qué parte del kilo es 0,25 kg?







Una receta indica consumir un medicamento en una dosis de 1,5 ml al día durante diez días. El medicamento viene en frascos de 100 ml. ¿Alcanza con un frasco para todo el tratamiento? (4 puntos).



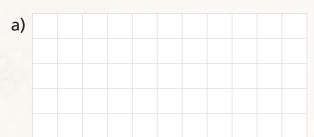


6 En las olimpiadas nacionales, el cronómetro electrónico registró el tiempo de la ganadora de los 100 metros planos mujeres, en 9,8 segundos. La diferencia con quien llegó en último lugar fue de 2,8 segundos. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la meta la última competidora? (4 puntos).





- Doña Laura pide a "Mibanco" un crédito de 35 U.F. El préstamo debe pagarlo en 12 cuotas iguales. Considerando el valor del día para la U.F.: (2 puntos c/u).
  - a) ¿Cuál es el valor de cada cuota?
  - b) ¿Cómo redondearía el valor de cada cuota?





8 Redondea a una cifra decimal las siguientes cantidades: (1 punto c/u).

142,36 gramos. \_\_\_\_\_\_

3.088,19 pesos.

4,13 minutos.



Unidad 2

# Números negativos y positivos





#### ¿Por qué siempre hay nieve en las altas montañas?

El suelo absorbe el calor recibido del sol, lo que hace que el aire sea más cálido al nivel en que comúnmente nos movemos las personas. A mayor altura, más frío es el aire; de hecho, la temperatura disminuye cerca de 5° Celcius por cada 1.000 metros de altura. Por lo tanto, mientras más alto, más frío estará el aire.

Los aviones comerciales, vuelan alejados del suelo desde diez a quince kilómetros. El suelo es la región de donde se irradia la mayoría del calor hacia el espacio, esa es la razón por lo que las montañas son frías y las más altas tienen nieve en sus cimas.

La temperatura de congelación es la temperatura a la que una sustancia pasa de líquido a sólido y temperatura de fusión es la temperatura a la que una sustancia pasa de sólido a líquido. La fusión del hielo en agua líquida, se produce a partir de los 0°C.

Fuente: adaptación de http://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Mweather1.htm



- ¿Cómo se representan numéricamente las temperaturas bajo cero?
- Si a nivel del suelo, la temperatura es de 20° C. Aproximadamente, ¿cuál es la temperatura en el punto donde vuela el avión?
- Si a nivel del suelo, la temperatura es de 20° C. Aproximadamente, ¿cuál es la temperatura en la cima del cerro?

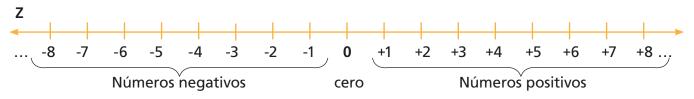
En esta unidad aprenderemos a reconocer, interpretar y operar con números negativos y positivos para dar respuesta a preguntas como estas.



#### **Números enteros**

Los números negativos junto a los números positivos y el cero forman el conjunto de los **números** enteros, que se define por:  $Z = \{... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3...\}$ 

Veámoslo en la recta numérica:



En la recta numérica observamos las siguientes relaciones:

- a) En los números positivos, el 1 es mayor que cero, el 2 es mayor que 1, el 3 es mayor que 2; es decir, 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5...
- b) En los números negativos, se produce lo contrario; el cero es mayor que -1 y -1 es mayor que -2 y así sucesivamente; es decir, -3 < -2 < -1 < 0...

En la recta numérica, los números que están a la derecha del 0 son mayores que los números que están a la izquierda.



De este modo, tenemos que:

$$... -8 < -7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5 < +6 < +7 < +8 ...$$

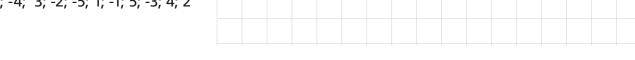
En los enteros positivos: entre más se aleja un número del cero, mayor es su valor.

En los enteros negativos: entre más se aleja un número del cero, menor es su valor.

Resuelva los siguientes ejercicios:

Ordene de menor a mayor los siguientes números enteros.





En los enteros positivos, se omite el signo. Así: +1 se escribe 1.

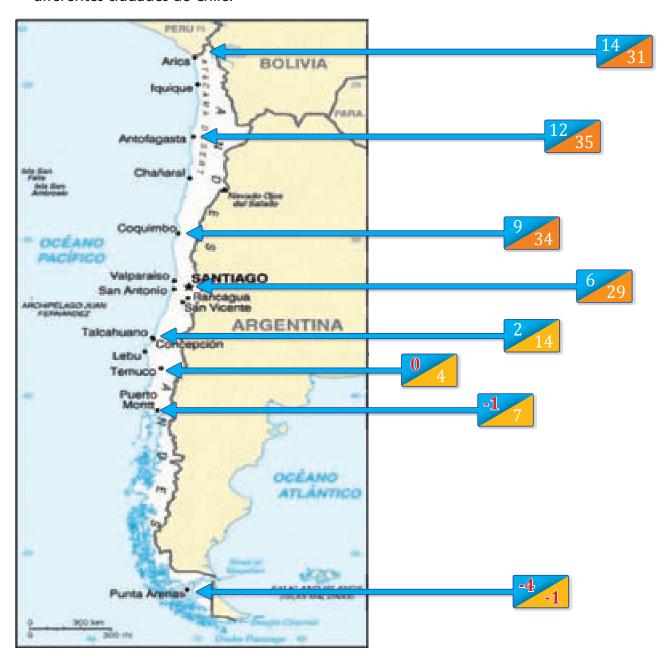
Para distinguir los números negativos ponemos un signo menos delante del número (-5), pasando a formar parte del mismo número, lo que es distinto del signo menos (-) de la sustracción.



#### Números enteros y temperaturas

Una de las aplicaciones de los números enteros es en la información referida a las temperaturas.

El siguiente mapa, nos informa acerca de las temperaturas registradas un día de invierno en diferentes ciudades de Chile:



Se usa el signo "menos" para indicar las temperaturas bajo cero, mientras más se aleja de cero, más baja es la temperatura.

Módulo 1 Ampliando el conocimiento de los números



# Actividad grupal

Reúnanse con su grupo, lean el informe del tiempo de la página anterior y contesten las siguientes preguntas:

- (1) ¿Qué ciudades registraron temperaturas bajo cero?
- Pablo es un joven que vive en Arica. Al escuchar el pronóstico del tiempo, piensa que en su ciudad hizo más frío que en Punta Arenas.

¿Está de acuerdo con la conclusión de Pablo? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_

¿Por qué? Fundamente su respuesta:

- ¿En cuál de estas dos ciudades la temperatura mínima fue más baja?

  Puerto Montt \_\_\_\_\_ Punta Arenas \_\_\_\_\_

  ¿Por qué? Fundamente su respuesta:
- 4 Escriba el número entero que corresponda a las siguientes afirmaciones:
  - a) En la Antártica, la temperatura máxima fue de 12 grados bajo cero: \_\_\_\_\_
  - b) El termómetro marcó 29 grados sobre cero:

#### Aplicación de los números enteros en la vida diaria

Así como en las temperaturas, los números enteros también nos permiten representar muchas otras situaciones de la vida diaria.





El buzo se encuentra a 120 metros bajo el nivel del mar. Se representa -120 m.

**Hypatia:** primera mujer matemática en la historia y la más notable de su época, nacida alrededor del año 370 después de Cristo. Se representa +370 d.C.

Fue asesinada en el año 415 después de Cristo.

Se representa +415.





Escriba en números enteros las siguientes situaciones:

a) Estamos a 3°C bajo cero.



b) El buzo se sumergirá a 200 m bajo el nivel del mar.



c) Expedición femenina chilena logra llegar a la cima del Everest a 8.848 m sobre el nivel del mar.



d) Pitágoras, gran matemático griego, nació en el año 500 antes de Cristo.



#### Números enteros en las finanzas

El gráfico, muestra la situación financiera del taller mecánico de don René en los 6 primeros meses del año.



Conociendo la aplicación de los números enteros podemos, de manera sencilla, interpretar este gráfico obteniendo varias conclusiones:

- 1 ¿Qué indican las cantidades con signo negativo? \_\_\_\_\_\_\_
- 2 ¿Qué indican las cantidades con signo positivo?
- ¿Cuál fue el mes en el que se registró la mayor pérdida y cuánto dinero se perdió exactamente?
- 4 ¿Cuánto dinero tiene el taller de don René al final de los seis meses?



36



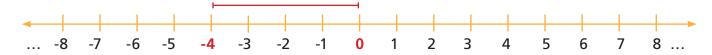
#### Valor absoluto de un número entero

Todo número entero está formado por dos partes:

- El valor absoluto.
- El signo.

#### Ejemplo:

El valor absoluto de -4, es la distancia de ese número al cero, en este caso la distancia es 4, por lo tanto, 4 es el valor absoluto de -4.



El valor absoluto de 4, es la distancia de ese número al cero, en este caso la distancia es 4; por lo tanto, 4 es el valor absoluto de 4.



El **valor absoluto** de un número entero es su distancia respecto del cero u origen en la recta numérica. Se indica escribiendo el número entero entre dos barras |x|, por ejemplo:

- el valor absoluto de -5 es 5 y se escribe: |-5| = 5
- el valor absoluto de +3 es 3 y se escribe: |+3| = 3

Recuerde que el "0" no tiene signo, por lo tanto, el valor absoluto de 0: |0| = 0

Resuelva el siguiente ejercicio.

Complete la tabla:

Situación	Número entero	Signo	Valor absoluto
Tres grados bajo cero.	-3	_	[3]
Una deuda de \$10.000.			
La fosa o abismo Challenger, en el Océano Pacífico, es el punto más profundo de la Tierra. Alcanza 11.034 m de profundidad.			
El oxígeno se convierte en líquido a los 183° bajo cero.			
El lago navegable más alto es el Titicaca, con 3.811 metros sobre el nivel del mar.			

Unidad 2 Números negativos y positivos

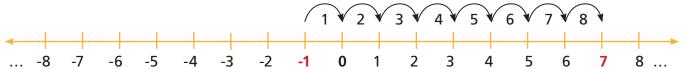


#### Adición de números enteros

En la ciudad de Coyhaique, la temperatura mínima fue de -1°C y ese día subió 8 grados. ¿Cuántos grados marcó el termómetro como temperatura máxima?

Resolvamos apoyándonos en la recta numérica:





Desde -1 se avanza 8 espacios hacia la derecha y se llega a 7.

La adición es: (-1) + 8 = 7, por lo tanto, la temperatura máxima fue de 7°C.

Sin ayuda de la recta numérica

En Santiago, la temperatura mínima fue de 6°C y subió 23°. ¿Cuántos grados marcó el termómetro como temperatura máxima?

Planteamos la adición: 6 + 23 = 29, por lo tanto, la temperatura máxima fue de  $29^{\circ}$ C.



Plantee la adición y resuelva las siguientes situaciones:

a) La temperatura mínima fue de -3°C y subió 4°. ¿Cuál fue la temperatura máxima?



b) La temperatura mínima fue de -8°C y subió 8°. ¿Cuál fue la temperatura máxima?



c) Si usted logra enfriar un pedazo de hielo a -7 °C y después de un tiempo su temperatura aumenta en 3°C, ¿en qué temperatura quedó el pedazo de hielo?



Al sumar números enteros, consideramos dos casos:

#### - Cuando tienen el mismo signo

Se suman los valores y se deja el signo que tengan, si son positivos signo positivo y si son negativos signo negativo. Si no se pone nada delante del número se entiende que es +. Ejemplos:

$$(+5) + (+4) = +9$$
 es lo mismo que:  $5 + 4 = 9$ 

$$(-5) + (-4) = -9$$
 es lo mismo que: - 5 - 4 = -9

#### - Cuando tienen distinto signo

Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto. **Eiemplos:** 

$$(+20) + (-10) = 20 - 10 = 10 (20 - 10 = 10, el mayor es +20, se pone +10)$$

$$(-8) + (+3) = 8 - 3 = 5 (8 - 3 = 5, el mayor es el -8, se pone -5)$$

$$(+11) + (-2) = 11 - 2 = 9 (11 - 2 = 9, el mayor es el 11, se pone +9)$$

¿Qué resultado se obtendrá al sumar un número entero con su opuesto?

Al sumar 
$$-5 + 5 = 0$$
;

$$(-3) + 3 = 0$$
;

$$9 + (-9) = 0$$

Elabore una respuesta y compártala con sus compañeros y compañeras.

Al sumar un número entero con su opuesto se obtiene cero. Esta es una regla muy importante de los números enteros.

## <sup>J</sup> Actividad grupal

Resuelvan las siguientes situaciones:

a) 
$$4 + 2 = _{-}$$

b) 
$$(-6) + 3 = _{-}$$

Nota: se escribe el entero negativo entre () para diferenciarlo de la operación.

- ¿Qué ocurre cuando sumamos enteros de igual signo?
- ¿Qué ocurre cuando sumamos enteros de distinto signo?

Para sumar enteros de distinto signo, se restan y se escribe el signo del que tiene mayor valor absoluto. Ejemplo: -2 + 5 = 3



En Concepción, a las 8:00 a.m, la temperatura mínima fue de 2°C sobre cero. A las 16:00 h el termómetro registró la temperatura máxima del día que fue 14°C sobre cero. ¿En cuántos grados varió la temperatura ese día en Concepción?

Elabore una respuesta y compártala con sus compañeros y compañeras.

Para responder esta pregunta nos ayudaremos con la recta numérica:



En la recta, se han destacado las temperaturas mínima (2°C) y máxima (14°C), observamos que hubo un desplazamiento de 12 unidades hacia la derecha.

¿Qué procedimiento matemático propondría para calcular esta variación, sin ayuda de la recta numérica?

Un procedimiento matemático para hacer el cálculo, sería restar a la temperatura máxima, la temperatura mínima: es decir, 14 - 2 = 12°C.

En este caso se restaron dos números positivos.

Veamos otro ejemplo:

¿Cuál fue la variación de temperatura si la mínima fue de 1°C y la máxima 7°C?

Planteamos la operación 7 - 1 = 6, la variación de temperatura fue  $6^{\circ}$ .

Calcule las siguientes variaciones de temperatura:





b) Mínima 8° y máxima 24°



c) Mínima 2° y máxima 21°



d) Mínima 0° y máxima 14°



e) Mínima 1° y máxima 19°



f) Mínima 7° y máxima 25°

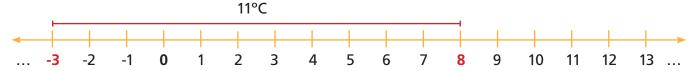




#### Sustracción con números negativos

Si la máxima fue de 8°C y la mínima fue -3°C, ¿cuál fue la variación de temperatura?

En la recta numérica:



Nos desplazamos desde el -3 hacia el 8. Hemos avanzado 11 lugares, por lo tanto, esa es la variación de temperatura.

Planteando la sustracción:

El número negativo entre paréntesis es para diferenciarlo de la operación de sustracción.

Entonces, buscamos un número que sumado con -3 nos dé 8. Ese número es 11.

Porque 
$$11 + (-3) = 8$$
. Es decir,  $8 - (-3) = 11$ .

En este caso se restó un número positivo y uno negativo.

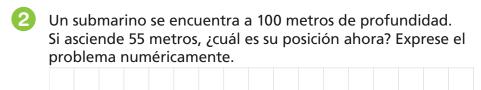
Complete, quiándose por el ejemplo:

a) 
$$5 - (-2) = 7$$
, porque  $7 + (-2) = 5$ 

b) 
$$12 - (-8) =$$
\_\_\_\_\_, porque ... +  $(-8) = 12$ 

c) 
$$9 - (-4) =$$
\_\_\_\_\_\_ porque ... +  $(-4) = 9$ 

c) 
$$9 - (-4) =$$
\_\_\_\_\_, porque ... +  $(-4) = 9$  d)  $-4 - (-6) =$ \_\_\_\_\_, porque ... +  $(-6) = -4$ 





#### Sustracción con sustraendo mayor que el minuendo

Si tenemos \$2.000 y gastamos \$3.700, quedamos debiendo \$1.700.

Podemos interpretar y escribir estas operaciones de las siguientes maneras:

Se quitan 3.700.

se agrega una deuda de 3.700:

$$2.000 - 3.700 = -1.700$$

$$2.000 + (-3.700) = -1.700$$

Si quitamos una cantidad positiva obtenemos lo mismo que si sumamos un negativo:

$$2.000 - 3.700 = 2.000 + (-3.700) = -1.700$$

Es decir, 2.000 - 3.700 = -1.700, porque -1.700 + (+3.700) = 2.000

Ο,



Resuelva las siguientes sustracciones:

Restar enteros es lo mismo que sumar al minuendo el inverso aditivo (opuesto) del sustraendo.

Ejemplo: 
$$3 - (-4) = 7 \iff 3 + 4 = 7$$

Escriba como adición las siguientes sustracciones y resuelva:

Sustracción	Adición Asociada
12 – (-3) =	12 + 3 = 15
(-24) – (-15) =	
(-19) – 43 =	

Doña Cristina registra cada noche los ingresos y egresos que tuvo ese día en su bazar. En la siguiente tabla, aparecen los datos que anotó la última semana.

Día	Ingresos (\$)	Egresos (\$)	Saldo del día (\$)	Saldo acumulado (\$)
Lunes	1.540	2.030		
Martes	706	770		
Miércoles	2.723	0		
Jueves	588	266		
Viernes	1.234	1.240		
Sábado	8.595	7.185		
Domingo	6.790	0		
Total				

- a) Complete la tabla anotando el saldo de cada día y el saldo que se va acumulando al agregárselo al del día anterior.
- b) ¿Con qué saldo quedó doña Cristina el martes por la noche? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto pagó doña Cristina esa semana? \_\_\_\_\_ c)
- d) Ella, dice que la semana anterior a la que se muestra, obtuvo \$1.500 más de saldo, aunque tuvo que pagar \$850 más. ¿Cuáles fueron en total los ingresos y egresos de esa semana?





#### Multiplicación de números enteros

Don Pablo contrató un plan telefónico que le permite hablar en un mes 120 minutos en todo horario. En este plan el minuto se cobra a \$150.

Al iniciar el mes, don Pablo hizo las siguientes llamadas: lunes 4 minutos, martes 4 minutos y el miércoles 4 minutos.

¿Cuántos minutos menos tiene don Pablo en su plan, al término del día miércoles?

Si cada día habló 4 minutos, quiere decir que en cada uno de esos días tiene 4 minutos menos, lo que podemos representar como -4.

Para saber cuántos minutos menos de su plan telefónico tiene don Pablo, podemos sumarlos:

$$(-4) + (-4) + (-4) = -12$$

Es decir, al cabo del tercer día, don Pablo ya tiene 12 minutos menos en su plan telefónico.

Como se repite tres veces el mismo sumando, podemos plantearlo como una multiplicación:

$$-4 \times 3 = -12$$

 Si ocupó 4 minutos cada día, desde el lunes hasta el viernes de esa semana, ¿cuántos minutos menos tiene don Pablo en su plan?

$$(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$$

Como multiplicación



 $(-4) \times 5 = -20$ 

- ¿Cuál es el signo del producto? \_\_\_\_\_\_\_

Cuando multiplicamos dos enteros de distinto signo, el producto es negativo.

Por ejemplo: 
$$-3 \times 2 = -6$$

$$2 \times -3 = -6$$

Y si invertimos los factores, ¿el producto será el mismo?, ¿tendrá el mismo signo?

Es decir: 
$$-4 \times 3 = 3 \times -4$$
;  $3 \times -1 = -1 \times 3$ 

Sumamos (-4), tres veces: (-4) + (-4) + (-4) = -12 El resultado es el mismo.

Sumamos (-1), tres veces: (-1) + (-1) + (-1) = -3 El resultado es el mismo.

Recordemos que la multiplicación en los números naturales cumple la propiedad conmutativa. En los números enteros la multiplicación también es conmutativa.

Adición	Multiplicación	Propiedad conmutativa
(-2) + (-2) + (-2) =		
(-8) + (-8) =		
(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =		

#### Multiplicación de enteros de igual signo

Don Luis necesita \$2.500.000 para comprar una máquina que utilizará en su taller. Él ahorra cada mes \$125.000 para reunir este monto.

- ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al cabo de un año?
- A ese ritmo de ahorro, ¿en cuánto tiempo podrá comprar la máquina?

Planteamos la multiplicación:  $125.000 \times 12 = 1.500.000$ . Este es el ahorro al año.

Los dos factores que hemos multiplicado tienen signo positivo.

Veamos otro ejemplo:

Una piscina tiene una capacidad de 3.460  $\ell$  de agua. Para llenarla, el salvavidas abre tres llaves que vierten 85  $\ell$  de agua por minuto, entre las tres.

- ¿Cuántos litros de agua habrá en la piscina al cabo de 30 minutos?
- ¿En cuánto tiempo se llenará la piscina?

Planteamos la multiplicación:

$$85 \times 30 = 2.550$$
.



Esa es la cantidad de agua que hay en 30 minutos.

Los dos factores que hemos multiplicado tienen signo positivo.

¿Qué signo tiene el producto? \_\_



• ¿Y qué signo tendrá el producto si los dos factores tienen signo negativo? \_\_\_\_\_

Por ejemplo, en -3 x -4 =  $\bigcirc$  ¿Qué signo tendrá el producto?

Para saberlo, realicemos la siguiente actividad:

#### Completando secuencias numéricas

¿Cuáles son los números que faltan en la secuencia?

Multiplicación	-2 x 6	-2 x 5	-2 x 4	-2 x 3	-2 x 2	-2 x 1	-2 x 0
Producto	-12	-10	-8		-4		0

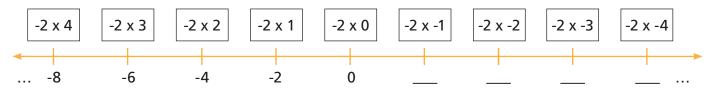
Ubicando los números en la recta numérica, podemos visualizar más fácilmente la secuencia.



• ¿Qué sucederá si extendemos la secuencia de modo que los dos factores tengan signo negativo? ¿Cuál será el signo del producto?

Multiplicación	-2 x 4	-2 x 3	-2 x 2	-2 x 1	-2 x 0	-2 x -1	-2 x -2	-2 x -3	-2 x -4
Producto	-8	-6	-4	-2	0				

Ubicando en la recta numérica, tendremos:



- a) ¿Qué signo tienen los factores a partir de -1?
- b) ¿Qué signo tienen los productos a partir de -1?
- c) ¿Qué podemos concluir de las multiplicaciones de -6 x -1; -6 x -2; -6 x -3?
- d) ¿Qué signo tendrá el producto de -6 x -10?

Cuando multiplicamos dos enteros de igual signo, el producto es positivo.

Por ejemplo:  $-3 \times -2 = 6$ 

 $2 \times 3 = 6$ 

#### **Propiedad conmutativa**

Sabemos que en los números naturales y en los números decimales, la multiplicación cumple la propiedad conmutativa. ¿Se cumplirá esta propiedad en la multiplicación de números enteros?

Se obtiene el mismo resultado porque la multiplicación de números enteros cumple la propiedad conmutativa.

#### Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

En la unidad anterior, vimos que una de las aplicaciones de las propiedades de la multiplicación es en la resolución de ejercicios en forma más rápida.

Por ejemplo, en un ejercicio como -7 x 56 no resulta fácil hacer un cálculo rápido. Sin embargo, podemos plantearlo como: -7 x (50 + 6) y, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, nos resulta más simple aún. Entonces, podemos resolverlo así:

$$-7 \times (50 + 6)$$
  $=$   $(-7 \times 50) + (-7 \times 6) =$   $-7 \times 56$   $=$   $-350 + -42$ 

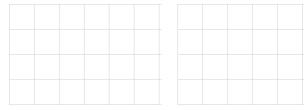
En la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: la multiplicación se distribuye con la adición. Dicho en términos simples, se reparte para los sumandos y la suma se resuelve al final.

Resuelva las siguientes multiplicaciones:

a) 
$$(-3) \times 7 =$$

b) 
$$(-2) \times (-4) \times 8 =$$

c) 
$$12 \times (-6) =$$







2 ¿De qué forma resolvió los ejercicios b) y d)? Comente su respuesta con el curso.

Podemos agrupar de distinta forma los factores y el producto no varía.

Por ejemplo: 
$$[(-2) x (-4)] x 8 = 64$$

$$(-2) \times [(-4) \times 8] = 64$$

Al igual que la multiplicación de números naturales, en los números enteros la multiplicación cumple la propiedad asociativa.



#### División de números enteros

#### De distinto signo

La señora Julia hace el balance de su negocio y se da cuenta que ha tenido una pérdida de \$600.000 en el año. Muy preocupada, quiere calcular cuánto dinero ha perdido, en promedio, cada mes.

Señalamos el total de las pérdidas como -600.000 y lo dividimos por 12 meses (el año).

Planteamos: -600.000 : 12 = -50.000, porque  $-50.000 \times 12 = -600.000$ 

Por lo tanto, la pérdida mensual del negocio ha sido de \$50.000

Los dos factores que hemos dividido tienen signo diferente.

¿Qué signo tiene el cuociente? \_



Para dividir dos números enteros de distinto signo, se dividen sus valores absolutos y en el cuociente se pondrá signo negativo.

Veamos otro ejemplo:

Una máquina perforadora ubicada a ras de piso, excavó 1.250 metros en 5 días. Los ingenieros, buscan determinar cuántos metros excava la máquina, en promedio, cada día.

Planteamos: -1.250: 5 = -250, porque  $-250 \times 5 = -1.250$ 

Por lo tanto, la máquina excava 250 m diariamente.



#### De igual signo

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, la aplicamos para dividir:

La división -8:2=-4, porque -4 multiplicado por 2=-8

La división 15: -3 = -5, porque -5 multiplicado por -3 = 15

Para dividir dos números enteros de **igual signo**, se dividen sus valores absolutos y en el cuociente se pondrá el signo positivo.

Resuelva las siguientes divisiones:

a) -16:4 = \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_ x 4 = -16

b) 12:-6 = \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_\_ x -6 = 12

c) (-15): (-3) = \_\_\_\_\_, porque \_\_\_\_ x \_\_\_\_ = -15

47

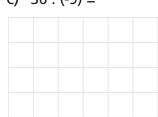
2 Resuelva los siguientes ejercicios:

b) 
$$-2 \times -4 \times -3 =$$

d) 
$$6 \times 2 \times -3 =$$









Para la multiplicación y para la división se cumple la misma regla de los signos:

Multiplicación	División
+ por + = +	+:+=+
– por – = +	-:-=+
+ por - = -	+:-=-
– por + = –	-:+=-

Lea y resuelva cada situación.

3 La temperatura disminuye cerca de 5°C por cada 1.000 metros de altura.



a) Si a nivel del suelo, la temperatura es de 20°C. Aproximadamente, ¿cuál es la temperatura en el punto donde vuela el avión?

12 km de altura

b) Si el avión desciende 2.000 metros, ¿cuál es la temperatura en ese punto?

20°C

En síntesis, las propiedades de la multiplicación se aplican en los conjuntos numéricos que hemos estudiado. El siguiente cuadro resume algunas de estas propiedades:

		Prop	iedad		
Conjuntos numéricos	Conmutativa $a \times b = b \times a$	Asociativa $a \times b \times c = (a \times b) \times c$	Neutro <i>a</i> x 1 = <i>a</i>	Distributiva $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	
Naturales	$\checkmark$	✓	$\checkmark$	✓	
Decimales	✓	✓	✓	✓	
Enteros	$\checkmark$	✓	$\checkmark$	✓	



En el siguiente enlace, usted podrá repasar "los números enteros". Haga click para leer en pantalla completa.

http://issuu.com/michelleandreahenriquez/docs/numeros\_enteros



#### **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 31 puntos

1 Represente cada situación con el número entero respectivo: (1 punto c/u).

Situación	Número entero
Tres grados bajo cero	
Doce grados de temperatura	
Mil años antes de Cristo	
Una deuda de \$10.000	
Quince grados sobre cero	

2 Lea atentamente la siguiente situación y responda.

#### ¡Si lo sabe, gana!

La T.V., transmite un concurso de conocimientos que asigna 6 puntos por cada respuesta correcta y descuenta 3 puntos por las incorrectas. Al final de 6 etapas del juego, cada participante obtuvo los siguientes resultados:

Mateo: En cada etapa, -6 puntos.

Claudia: Al final tiene -90 y en cada etapa obtuvo igual cantidad de puntos.

María: En cada etapa, 12 puntos.

Luis: En cada etapa obtuvo el mismo puntaje y en total llega a 126 puntos.



a) Complete la tabla, en relación a la participación de los concursantes: (12 puntos).

Participantes	Etapas de participación	Puntaje obtenido en cada etapa	Puntaje al final del juego
Mateo			
María			
Luis			
Claudia			

b) ¿Quién ganó el concurso? \_\_\_\_\_



Resuelva la siguiente situación: (8 puntos).

En un laboratorio dental, realizan un estudio acerca de la resistencia de un material para amalgamas. El estudio, consiste en someter el material a distintas temperaturas. Para ello, lo colocan en un congelador que disminuye la temperatura 3°C cada 2 horas. Si la temperatura inicial del material es de 15°C:

a) ¿En cuántas horas la temperatura habrá disminuido er
---

b)	En ese momento,	¿cuál será l	la temperatura	del material?
----	-----------------	--------------	----------------	---------------

- c) ¿Cuántas horas deben transcurrir para alcanzar los 0°C?
- d) ¿Cuántas horas tardará en alcanzar los -20°C?
- Durante el campeonato de fútbol de la comuna del Pelarco, Roberto y Elías comparan los goles a favor y goles en contra que lleva cada equipo. Ellos, han anotado sus resultados en la siguiente tabla, faltando por completar algunos datos: (6 puntos).

F	Bandida a la carda a	Go	oles	Diferencia de goles
Equipo	Partidos Jugados	A favor	En contra	
Deportivo Pelarco	4	+10	-7	
La Batalla	4	+7	-4	
Arrozal	4	5	-9	
Santa Rosa	4	0	-1	
San Francisco	4	2	-3	

Por cada equipo, escriba en la tabla la diferencia de goles. Luego, ordénelas de acuerdo a la mayor y menor diferencia.

50

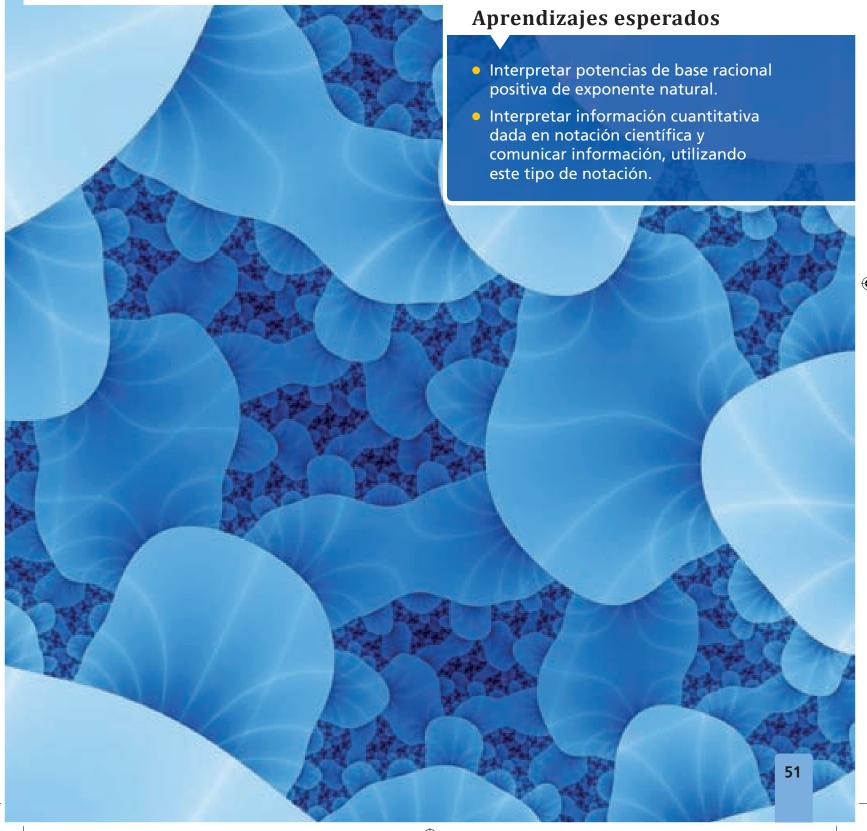
Módulo 1 Ampliando el conocimiento de los números





Unidad 3

## **Potencias**





#### Pequeñas, pero poderosas

Las bacterias son organismos unicelulares microscópicos, sin núcleo ni clorofila.

La bacteria es el más simple y abundante de los organismos y puede vivir en tierra, agua, materia orgánica o en plantas y animales.

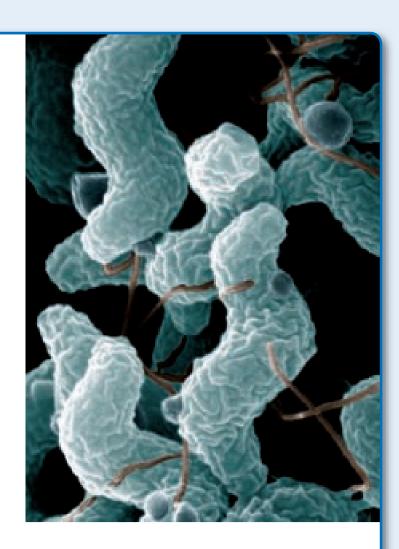
Tienen una gran importancia en la naturaleza, pues están presente en los ciclos naturales del nitrógeno, del carbono, del fósforo, etc. y pueden transformar sustancias orgánicas en inorgánicas y viceversa.

Son, también, muy importantes en las fermentaciones aprovechadas por la industria y en la producción de antibióticos.

Desempeñan un factor importante en la destrucción de plantas y animales muertos.

En efecto, la vida en nuestro planeta no existiría sin bacterias, las cuales permiten muchas de las funciones esenciales de los ecosistemas. Una bacteria de tamaño típico es tan pequeña que es completamente invisible a la vista.

El proceso por el cual se reproducen las bacterias se conoce con el nombre de bipartición o fisión binaria, el cual consiste en la división de una bacteria en dos, cada cierto tiempo.



Una bacteria se reproduce cada diez minutos en otras dos bacterias idénticas, que se vuelven a reproducir idénticamente en el mismo tiempo. Al introducirlas en un frasco, se demorarían tres horas en llenarlo.

Fuente: http://www.profesorenlinea.cl/Ciencias/Bacteria.htm

• A ese ritmo de reproducción, ¿cuántas bacterias puede haber al cabo de tres horas?

En esta unidad estudiaremos cómo se representan estas y otras cantidades muy grandes o muy pequeñas mediante las potencias.





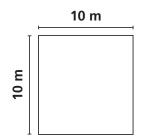
#### Representando potencias

#### En la construcción.

Se está construyendo un condominio de departamentos y todo el equipo de trabajadores se encuentra realizando su trabajo con la mejor disposición. Hay ingenieros, capataces, albañiles, carpinteros y obreros cumpliendo su labor.

A don Manuel le encomendaron la misión de embaldosar un patio que tiene forma cuadrada y mide 10 m de lado. Comienza a planificar cómo hará el trabajo. Para ello, plantea el siguiente cálculo: 10 metros x 10 metros.

• ¿Qué es lo que desea saber don Manuel al plantear esta multiplicación?



Efectivamente, don Manuel comienza por determinar el **área del patio** y para ello plantea la multiplicación: 10 m x 10 m.



Uno de los edificios que se construyen tiene 10 pisos y en cada piso habrá 10 oficinas. La señorita Viviana, que es una de las ingenieras del proyecto, quiere saber cuántas puertas necesitará para ese edificio.

Entonces, plantea: 10 x 10 x 10 = pisos departamentos puertas

- ¿Cuántas puertas debe encargar la señorita Viviana?
- ¿Tienen algo especial estas multiplicaciones?

En cada una de las multiplicaciones anteriores, los factores son iguales:

$$10 \times 10 = 100 (2 \text{ veces } 10).$$

$$10 \times 10 \times 10 = 1.000$$
 (3 veces 10).

Una multiplicación en la que los factores son iguales, se puede escribir como potencia.

Una potencia es un producto de factores iguales. Por ejemplo:  $10 \times 10 = 10^2$ ;  $7 \times 7 \times 7 = 7^3$  En una potencia, al factor que se repite se le llama **base** y a las veces que se repite esa base se le llama **exponente**.







an el a e

Unidad 3 Potencias

53



• Cómo se escribiría en potencia la multiplicación 10 x 10 x 10 x 10, si:

Significa que el 10 se multiplica por sí mismo 2 veces.

Se escribe como potencia 
$$10^2 = 100$$
.

Significa que el 10 se multiplica por sí mismo 3 veces.

Se escribe como  $10^3 = 1.000$ .

Significa que el 10 se multiplica por sí mismo 3 veces.

Se escribe como  $10^3 = 1.000$ .

Significa que el 10 se multiplica por sí mismo \_\_\_\_\_ veces.

Se escribe como \_\_\_\_\_\_

Veamos algunas potencias de 10.

Represente como potencia cada multiplicación:

Multiplicación	Potencia	Se lee
10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10	10 <sup>7</sup>	Diez elevado a siete o diez a la séptima.
10 x 10 x 10 x 10 x 10		Diez elevado a cinco o diez a la quinta.
10 x 10 x 10		Diez elevado a tres o diez al cubo.
10 x 10		Diez elevado a dos o diez al cuadrado.



#### "Ha llegado carta"

Lean la siguiente situación y respondan las preguntas planteadas en relación a ella.

## La empresa K-mail está iniciando su función

como proveedora del servicio de correo electrónico

Como una forma de darse a conocer, deciden que el acceso a una cuenta se hará por medio de

Esta modalidad la aplicarán durante cinco días y, en ese tiempo, la empresa espera captar un millón de clientes. Después de ese tiempo, la promoción terminará y a los nuevos clientes que se incorporen se les cobrará por el derecho a tener una cuenta de correo.

invitaciones en la que cada usuario podrá invitar a diez personas más a tener correo gratis en esta empresa.

Si cada una de las diez personas invita a otras diez, ¿cuántas personas tendrán correo electrónico en la primera etapa?



2 El tiempo establecido, ¿alcanza para lograr el millón de clientes con correo gratis?

Sí \_\_\_\_\_

No

¿Por qué? \_\_

- Usando potencias, ¿cómo se escribiría la cantidad de personas que corresponde a la meta de la empresa?
- 4 Completen la siguiente tabla:

Etapa	1	2	3	4	5	6
Personas						
Potencia	10 <sup>1</sup>					

¿Cuántas etapas son necesarias para cumplir la meta del millón de personas?

Lean y desarrollen las siguientes actividades.

6 Escriban el exponente que falta en cada igualdad.

a) 10 = 1

c) 10 = 10.000

e) 10 = 10.000.000

b)  $10^{-} = 1.000$ 

d) 10 = 1.000.000

f)  $10^{-} = 10^{-}$ 

Completen las casillas de esta tabla:

Potencia	Base	Exponente	Desarrollo	Valor de la potencia
10 <sup>4</sup>	10	4	10 x 10 x 10 x 10	10.000
2 <sup>6</sup>				
9 <sup>2</sup>				
5 <sup>3</sup>				

¿Qué sucede en los últimos tres casos?



#### Potencias de otras bases

Tengamos presente que:

Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo, varias veces.

Escribiremos otros productos como potencias. Para ello, desarrollemos el problema planteado al inicio de esta unidad.

#### Las bacterias

Cuando las bacterias y otras células alcanzan un tamaño y un metabolismo crítico, se dividen y forman dos células hijas idénticas; cada una de estas recibe, aproximadamente, la mitad de la masa celular de la célula original y comienzan a crecer. Una bacteria puede llegar a dividirse cada 10 minutos y formar con rapidez una colonia que es visible para el ojo humano.



Complete las casillas de las tablas presentadas a continuación:

a) ¿Cuántas bacterias puede haber al cabo de 1 hora?

Tiempo	10 min.	20 min.	30 min.	40 min.	50 min.	60 min.
Bacterias	2					
Potencia	2 <sup>1</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>6</sup>

b) Pedro dice que, para saber la cantidad de bacterias que puede haber en 1 hora, basta calcular la cantidad que hay en media hora y multiplicar por 2.

¿Le parece adecuado el razonamiento de Pedro?

Sí	No	¿Por qué?
		C. o. 480.

Complete el siguiente recuadro con ayuda de la calculadora. ¿Al cabo de cuánto tiempo habrá más de 5.000 bacterias?

Tiempo	70 min.	80 min.	90 min.	100 min.	110 min.	120 min.	130 min.
Bacterias							
Potencia	2 <sup>7</sup>	2 <sup>8</sup>	2 <sup>9</sup>	2 <sup>10</sup>	2 <sup>11</sup>	2 <sup>12</sup>	2 <sup>13</sup>

En esta situación, ¿cuál es la base?

Módulo 1 Ampliando el conocimiento de los números

¿Puede dar respuesta a la pregunta del inicio de la unidad? \_\_\_\_\_



En general, encontrar el valor de una potencia implica multiplicar por sí mismo la base tantas veces como indique el exponente.

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \longrightarrow$$

 $2 \times 2 \times 2 = 8$  Significa que el 2 se multiplica por sí mismo 3 veces. Lo podemos escribir como  $2^3 = 8$ 

Significa que el 5 se multiplica por sí mismo 2 veces. Lo podemos escribir como  $5^2 = 25$ 

 $3 \times 3 \times 3 = 81$  Significa que el 3 se multiplica por sí mismo 4 veces. Lo podemos escribir como  $3^4 = 81$ 

Complete cada casilla de la tabla con ayuda de la calculadora:

Expresión	Desarrollo	Base	Exponente	Potencia	Se lee
2 <sup>3</sup>	2 x 2 x 2	2	3	8	Dos al cubo
4 <sup>5</sup>					
7 <sup>2</sup>					
1 <sup>8</sup>					

Complete cada proposición con factores iguales.

#### ¿Qué sucede con las potencias de exponente 1 y 0?

Una forma de descubrirlo es desarrollando las siguientes actividades:

#### Completando secuencias numéricas

¿Cuáles son los valores de las potencias que faltan en esta secuencia?

Potenci	a 2 <sup>6</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>
Valor	64	32	16	8			

Para encontrar los valores que faltan debemos observar la relación entre el exponente y el valor de la potencia.

Entonces: observamos que cuando el exponente disminuye en una unidad, el valor de la potencia disminuye a la mitad. O al revés, cuando el exponente aumenta en una unidad, el valor de la potencia se duplica.



57



#### Ahora puede responder:

- ¿Qué sucede con las potencias de exponente 1 y las de exponente 0? ¿Cuál es su valor?
- Complete la siguiente cuadrícula y comparta sus resultados con el curso:

Potencia	3 <sup>1</sup>	12 <sup>0</sup>	20 <sup>1</sup>	5 <sup>0</sup>	4 <sup>0</sup>	6 <sup>1</sup>	80
Valor							

#### Expresión de cantidades aplicando potencias de 10



Dime Isabel, ¿qué entiendes por sistema de numeración decimal?

Correcto. Pero.

que acabas de afirmar?

¿me podrías dar una explicación más clara de lo

Es el sistema de numeración que utiliza los dígitos del 0 al 9 como base para formar los números.



Está compuesto por tres dígitos: el 2, el 4 y el 7. Debido a que estos dígitos no tienen la misma posición, su valor relativo es diferente. Me explico: el dígito 2 tiene un valor igual a 200, el dígito 4 tiene un valor igual a 40 y el siete tiene un valor igual a 7 unidades, "doscientos cuarenta y siete". Este número se puede expresar en la siguiente forma:

$$247 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

Como podemos observar, los valores relativos de los dígitos se asocian a potencias de 10. Por eso, decimos que los números que utilizamos normalmente en la vida diaria, pertenecen al sistema de numeración decimal.

El uso de las potencias de 10 está muy arraigado en las ciencias debido a varias razones. Dos de estas son las siguientes:

- El sistema de unidades empleado por el mundo científico es el sistema métrico, el cual se basa en la notación decimal.
- Los números que usamos cotidianamente están escritos en la base decimal.

Hay números como 1.000.000.000 y 0,0000001 que no son fáciles de escribir. Dado que números muy grandes o muy pequeños son comunes en la ciencia, con frecuencia se escribirán utilizando potencias de 10.



Las potencias se aplican en la escritura de números de muchas cifras.

Observemos que el número 20.000 + 4.000 + 700 + 60 + 8 lo podemos representar utilizando las potencias de 10, para ello, escribimos cada número como producto de un dígito por la potencia de 10 que corresponda a la posición de ese dígito.

Orden	Posición	Valor	Con potencias
Unidad de millón			
Centena de mil			
Decena de mil	2	20.000	2 x 10 <sup>4</sup>
Unidad de mil	4	4.000	4 x 10 <sup>3</sup>
Centena	7	700	7 x 10 <sup>2</sup>
Decena	6	60	6 x 10 <sup>1</sup>
Unidad	8	8	8 x 10 <sup>0</sup>

Luego, 
$$24.768 = 2 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

Veamos otro ejemplo:

$$352.936 = 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

## Actividad grupal

Escriban el número que corresponde a cada desarrollo:

a) 
$$5 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0 =$$

b) 
$$2 \times 10^6 + 7 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 =$$

c) 
$$5 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 8 \times 10^0 =$$

d) 
$$2 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 1 \times 10^0 =$$

e) 
$$7 \times 10^9 + 3 \times 10^5 + 2 \times 10^1 =$$



#### **Notación Científica**

#### Los Grandes Números de nuestro sistema solar



La Tierra es el tercer planeta desde el Sol, el quinto más grande de todos los planetas del Sistema Solar y el más denso de todos, respecto a su tamaño. Se desplaza en una trayectoria apenas elíptica alrededor del Sol a una distancia de unos 150 millones de kilómetros. El volumen de la Tierra es más de un millón de veces menor que el del Sol, mientras que la masa terrestre es 81 veces mayor que la de su satélite natural, la Luna.

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Tierra

La distancia entre la Tierra y el Sol escrita en números sería 150.000.000 de kilómetros.

Para estos números grandes los matemáticos han convenido una forma especial de escritura y esa es la llamada **Notación Científica**.

Por ejemplo, la distancia anterior escrita en notación científica sería así:

En sistema decimal En notación científica

150.000.000 → 1,5 x 10<sup>8</sup> millones de kilómetros.

Siguiendo con las características de la Tierra, sabemos que su masa es de:

En sistema decimal En notación científica

5.980.000.000.000.000.000.000 kg. → 5,98 x 10<sup>24</sup> kg.

#### ¿Cómo escribir un número, usando la notación científica?

Para escribir una cantidad en notación científica, será necesario contar de derecha a izquierda los lugares o posiciones que existen entre el último número de la serie numérica hasta llegar al primero (menor que 10) y luego, se multiplica por una potencia de 10, de acuerdo a la cantidad de dígitos que haya hasta antes del lugar en que pusimos la coma.

En nuestro ejemplo, veremos que hay veinticuatro lugares o posiciones, por lo que la notación científica de ese número entero la escribimos como:  $5,98 \times 10^{24}$ . (El superíndice 24 representa los lugares que hemos contado desde el 0 hasta el 5).



Otro ejemplo: la distancia de Mercurio al Sol es de 57.850.000 kilómetros.

Escribimos 5,785 (es menor que 10) y la potencia de 10 tendrá como exponente la cantidad de dígitos que haya hasta antes del lugar en que pusimos la coma. En este caso hay 7 lugares, entonces, el exponente de la potencia será 7.

La distancia entre Mercurio y el Sol es de 5,785 x 10<sup>7</sup> km.

Número decimal Potencia de base 10 5,785 x 10<sup>7</sup>



## Actividad grupal

Para cada planeta, escriba la distancia al Sol en notación científica.

Planeta	Distancia del Sol	Notación científica
Júpiter	777,7 millones de km.	
Marte	228 millones de km.	
Mercurio	57.850.000 km.	
Neptuno	4,5 miles de millones de km.	
Saturno	1.428.000.000 km.	
Tierra	150 millones de km.	
Urano	2,87 miles de millones de km.	

- a) Entre Saturno y Júpiter, ¿cuál está más lejos del sol? \_\_\_\_\_\_
- b) Entre Urano y Marte, ¿cuál está más lejos del sol? \_\_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es el planeta que está más cerca del Sol? \_\_\_\_\_\_
- d) ¿Cuál es el planeta que está más lejos del Sol? \_\_\_\_\_\_

2 Para cada planeta de la tabla, escriba el diámetro en forma desarrollada.

Planeta	Diámetro	Sistema decimal
Júpiter	1,4 x 10 <sup>5</sup> km	
Marte	6,8 x 10 <sup>3</sup> km	
Mercurio	0,49 x 10 <sup>4</sup> km	
Neptuno	4,85 x 10 <sup>4</sup> km	
Saturno	1,21 x 10 <sup>5</sup> km	
Tierra	1,27 x 10 <sup>4</sup> km	
Urano	5,1 x 10 <sup>4</sup> km	

En el caso del diámetro de la Tierra:

- a) ¿Qué representa el 10<sup>4</sup>?
- b) ¿A cuántos kilómetros corresponde esta longitud?
- 3 Sin hacer cálculo alguno, María dice: "Saturno tiene un diámetro mayor que la Tierra". ¿En qué aspecto matemático basó su conclusión?
  - a) En que 10<sup>5</sup> representa una cantidad mayor que 10<sup>4</sup>.
  - b) En que 1,27 es mayor que 1,21.
  - c) En que había visto unas fotografías.
  - d) En que 1,27 es menor que 1,21.
- 4 Escriba en notación científica:

	Notación científica
La velocidad de la luz en el vacío es de 300.000.000 m/s.	
La población mundial es de 6.500.000.000 habitantes.	



#### Glóbulos rojos y notación científica

Los grandes números están en todas partes, en torno a nosotros, e incluso en el interior de nosotros mismos; únicamente hay que saber descubrirlos.

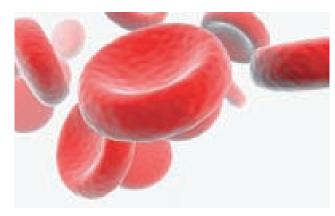
Desde tiempos inmemorables se escucha la frase "incontables como las arenas del mar". El número de estrellas que se ve a simple a vista en un hemisferio es de 3.500. En la arena de las orillas del mar hay millones de veces más granos de arena que estrellas visibles a simple vista.

Cada centímetro cúbico de aire que respiramos contiene 27 trillones (2,7 x 10<sup>19</sup>) de ínfimas partículas llamadas moléculas.

En el interior de nuestro cuerpo, veremos que en una gota de sangre hay una multitud enorme de corpúsculos pequeñísimos de color rojo (glóbulos rojos). Una gotita pequeñísima de sangre, de un milímetro cúbico, contiene 5.000.000 de estos corpúsculos.

¿Cuál es el número total en nuestro cuerpo?

En el cuerpo humano hay, aproximadamente, un número de litros de sangre 14 veces menor que el número de kilogramos que pesa la persona.



Si usted pesa 40 kg, su cuerpo contiene aproximadamente, 3 litros de sangre (40 :  $14 = 2,8751 \approx 3$ ), lo que es lo mismo que 3.000.000 de milímetros cúbicos.

Dado que en cada milímetro cúbico hay 5 millones de glóbulos rojos, el número total de estos en su sangre, se puede calcular mediante el producto:

 $5.000.000 \times 3.000.000 = 15.000.000.000.000$ 

Mucho más breve sería expresarlo en notación científica, es decir: 1,5 x 10<sup>13</sup> ¿no le parece?

Considerando su peso actual, calcule el número total de glóbulos rojos que contiene su sangre, expresado en:

milímetros cúbicos



litros



en notación científica





### **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 34 puntos

Complete la siguiente tabla: (6 puntos).

Nombre	Potencia
Seis elevado a la cuarta.	
Ocho elevado a la quinta.	
Nueve al cuadrado.	
Diez elevado a doce.	
Cinco elevado a la séptima.	
Dos al cubo.	

2 Escriba con palabras las siguientes potencias: (5 puntos).

Potencia	Nombre
2 <sup>7</sup>	
3 <sup>4</sup>	
5 <sup>2</sup>	
8 <sup>5</sup>	
10 <sup>3</sup>	

3 Escriba las siguientes cantidades usando notación científica: (8 puntos).

a) 12.587.694 = \_\_\_\_

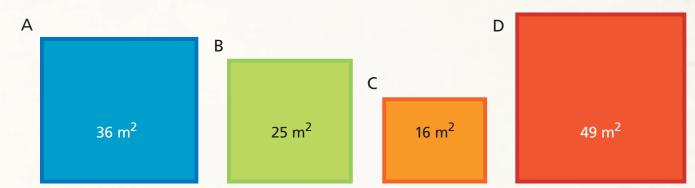
b) 324.567.896 = \_\_\_\_\_

c) 9.065.438.218 = \_\_\_\_\_

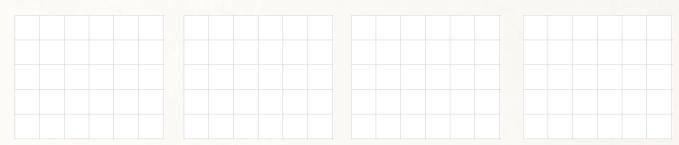
d) 53.021.450.780 = \_\_\_\_



4 Dentro de los siguientes cuadrados está escrita el área de cada uno:



a) ¿Cuál es la medida del lado en cada uno de los cuadrados? (8 puntos).



b) Escriba como potencia la fórmula para calcular el área de cada cuadrado. Guíese por el ejemplo. (4 puntos).

Cuadrado	Medida del lado	Fórmula para calcular el área	Área del cuadrado
А	6 m	(6 m) <sup>2</sup>	36 m <sup>2</sup>
В			
С			
D			

5 Determine, en cada caso, el número que está escrito en notación científica. (3 puntos).

Notificación científica	Número
La distancia de la Tierra a la Luna es 4 x 10 <sup>5</sup> km.	
La distancia, aproximada, de Venus al Sol es 1,09 x 10 <sup>8</sup> km.	
La población mundial es de 6,5 x 10 <sup>9</sup> habitantes.	

Unidad 3 Potencias



#### **SÍNTESIS MÓDULO 1**

En el módulo "Ampliando el conocimiento de los números", desarrollamos los contenidos correspondientes a la multiplicación y división de números decimales, los números enteros y potencias.

Respecto a la multiplicación de números decimales, aprendimos a resolver casos como: 12,3 x 6, también multiplicaciones de la forma: 0,3 x 2. Aprendimos que, a diferencia de lo conocido hasta ahora, estos productos disminuyen el valor del número natural que se está multiplicando.

Respecto a las propiedades la multiplicación de números decimales, al igual que la multiplicación de números naturales, cumple las propiedades: conmutativa, asociativa y distributiva.

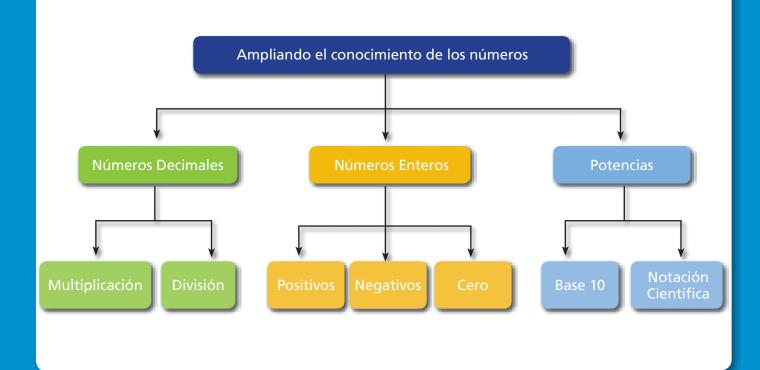
En la división de números decimales estudiamos casos como el siguiente: 10,4 : 1,3 en el cual el procedimiento indica que se debe amplificar el dividendo y el divisor por una potencia de 10, según la cantidad de cifras decimales que tenga el divisor.

Para dividir un número decimal por una potencia de 10, basta con desplazar la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10.

Para los casos de división, tales como 125 : 0,1, equivale a multiplicar el número natural por 10.

En relación a los números enteros, aprendimos a representar situaciones con números negativos y positivos; también aprendimos a resolver operaciones con ellos.

En el siguiente esquema, se sintetiza los contenidos trabajados en el módulo:



# Módulo 2



## Razones, porcentajes y proporciones

Razones y porcentajes

2

Variaciones proporcionales



Unidad

## Razones y porcentajes





#### Estadísticas del consumo de tabaco en Chile

En Chile, 4 millones 779 mil 653 personas sufren de tabaquismo, fumando en promedio 8 cigarrillos diarios.

El año 2002, un total de 13 mil 882 chilenos murieron por causas atribuibles al tabaco.

En torno al 25% de los menores de 15 años en Chile fuma, según se desprende de la Encuesta Mundial de Tabaquismo en Jóvenes (EMTA) 2003.

La mayoría se inicia en el consumo a los 12 años y llama la atención el alto porcentaje que empieza a fumar antes de los 10 años de edad: 17% en Tarapacá y 19% en la Región Metropolitana.

Inicio del consumo de tabaco antes de los 10 años. Chile, 2003.

Región	Hombres	Mujeres	Total %
Tarapacá	19,0	14,6	16,8 ≈ 17%
Valparaíso	18,8	16,5	17,7 ≈ 18%
Metropolitana	20,5	16,7	18,6 ≈ 19%
Biobío	19,2	17,6	18,4 ≈ 18%

Uno de cada tres escolares, entre 13 y 15 años, fuma en la Región Metropolitana, lo que los ubica como los estudiantes que más fuman entre los 100 países encuestados.

El tabaco es responsable del 30% de todas las muertes por cáncer. Un cigarrillo contiene 400 sustancias químicas de las cuales 50 son cancerígenas.

El tabaco dificulta la concepción, aumenta el riesgo de aborto, el riesgo de nacidos prematuros y de bajo peso y acorta el tiempo de lactancia materna.

La OMS (Organización Mundial de la Salud), teme que por el consumo de tabaco y los consecuentes daños para la salud, la "epidemia del tabaco" recién haya comenzado.

Fuente: http://www.dejadefumar.us/estadisticas.pdf



• De acuerdo a los resultados entregados en este informe, ¿podríamos decir que en Chile "de cada 100 menores de 15 años, 25 fuman"?

En esta unidad, aprenderemos a comprender, representar y calcular porcentajes en diferentes situaciones de la vida diaria.

**Unidad 1** Razones y porcentajes

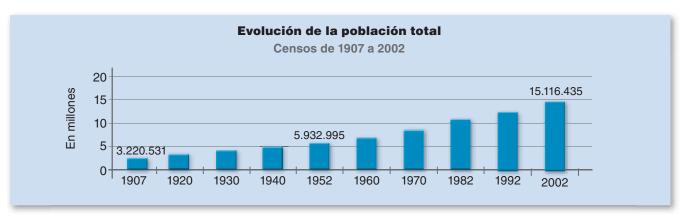


#### Comparación por diferencia

#### Cómo somos y cómo vivimos los chilenos y chilenas.

Cada diez años, se realiza en nuestro país el censo de población y vivienda con el objetivo de establecer la evolución de la población y las condiciones de vida. El último censo, realizado el año 2002, entregó los siguientes resultados acerca del total de habitantes.

El gráfico, muestra el crecimiento de la población del país a partir de 1907.



Fuente: INE. Evolución del Crecimiento de la Población Chilena 1900 – 2002.

Entre el Censo de 1992 y el del año 2002, en cifras absolutas, el país aumentó su población en 1.768.034 personas, con lo que la población de Chile llegó a 15.116.435 personas.

De acuerdo con esta información, podemos obtener las siguientes conclusiones:

En 2002, Chile tiene 1.768.034 habitantes más que en 1992.

También podemos decir que:

En 1992, Chile tenía 1.768.034 habitantes menos que en 2002.

En estos casos hemos estado comparando dos periodos de tiempo por diferencia.

¿Cuántos habitantes había en Chile, de acuerdo al Censo de 1992?

Para determinarlo, planteamos:

15.116.435 - 1.768.034 = 13.348.401

Afirmamos que en 1992, en Chile había 13.348.401 habitantes.



#### Comparación por cuociente. Razones

Muchas veces la información es entregada en porcentajes para una mejor comprensión de ella. Por ejemplo:

Una tienda de artículos electrónicos representa las ventas diarias, de la siguiente forma:

Artículo	Unidades vendidas	Porcentaje	
T.V. color	26	34%	
Grabadora	14	17,5%	
DVD	18	20%	
Equipo de música	22	28,5%	
Total	80	100%	

Observamos que el total de artículos vendidos corresponde al 100% y las cantidades de cada artículo corresponden a una parte de ese 100%. La suma de ellos nos da el 100%

Los datos se suelen entregar en porcentajes, porque eso hace más fácil su comprensión. Es una comparación de una parte respecto del todo; así, cuando se habla del 20%, quiere decir que son 20 de cada 100.

Por ejemplo, el 10% quiere decir 10 de cada 100 unidades que contemos.

#### Representando razones

La tabla indica que el **20**% de las ventas corresponde a DVD, esto significa que **20 de cada 100** artículos vendidos son DVD.

Decir, "veinte por ciento" se escribe:

$$\frac{20}{100}$$
 = Esta forma de representar la comparación se llama **razón**.

Una **razón** es una comparación por cuociente entre dos cantidades de una misma unidad. En una razón, el primer término se llama **antecedente** y el segundo término se llama **consecuente**.

En este caso, las variables que se han comparado son **artículos vendidos en un día** y el **total de ventas diarias realizadas**.



Toda comparación por cuociente o división, es una razón.

Por ejemplo, respecto a la información que aparece en la página 69, "Estadísticas del consumo de tabaco en Chile", se lee:

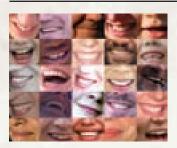
"En la Región Metropolitana, uno de cada tres escolares, entre 13 y 15 años, fuma".

Es decir,  $\frac{1}{3}$  de los escolares de esta región, de entre 13 y 15 años, fuma.

Pensemos en un curso de 30 estudiantes. De acuerdo a esta razón, ¿cuántos estudiantes serían los que fuman?



## ¿Chilenos felices o descontentos?



Principalmente felices. Esa es la respuesta correcta que establece un estudio realizado a 1.280 personas de entre 15 y 75 años de nueve regiones del país.

Los que se reconocen más felices son los nortinos, con 68%, mientras los sureños muestran un 60% y en la Región Metropolitana, un 64%.

A la hora de determinar cuáles son los principales elementos que conforman ese estado de satisfacción, en primer lugar los encuestados nombran la salud física y mental, seguida por la situación económica, la apariencia física y la relación con la familia.

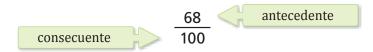
Fuente

http://www.latercera.com/noticia/tendencias/2009/12/659-209612-9-felicidad-de-los-chilenos-aumenta-en-ultimos-cuatro-anos.shtml

Esta información, nos indica que un 68% de los nortinos se declaran felices.

Escrito como razón:  $\frac{68}{100}$ , significa que de cada 100 nortinos, 68 se declaran felices.

Los términos de la razón:



En este caso, las variables que se han comparado son índice de felicidad o descontento y habitantes de Chile.

Según esta razón, ¿podríamos decir que más de la mitad de los habitantes de la zona norte de Chile se declaran personas felices? Comparta su opinión con el curso.

De esta información, podemos señalar que el 40% de los sureños se declara descontento. ¿Comparte usted esta afirmación? ¿Por qué? Exponga su opinión.





Lean y resuelvan cada una de las siguientes situaciones:

- 1 Escriban como razón las siguientes relaciones y determinen las variables que se están comparando:
- a) 55 de cada 100 niños y niñas de primer año de Enseñanza Básica presentan problemas de caries.
- b) De cada 1.000 habitantes, 134 viven en zonas rurales.
- 2 Lean y respondan acerca de cada situación:
- a) De acuerdo a la noticia presentada en la página anterior, ¿en qué zona de Chile sus habitantes son menos felices?
- b) ¿En cuál de las tres zonas de Chile se lee que de cada 100 habitantes, 64 se declaran personas felices?
- c) Realicen un sondeo entre sus compañeros y compañeras y determinen si se declaran felices o descontentos. Indiquen el resultado como razón y porcentaje. ¿Qué concluyen? Compartan sus resultados con el curso.
- 3 En cada situación, compare por diferencia y luego por cuociente:

#### a) Situación A

Según el Censo del año 2002, la superficie de la región de Atacama es aproximadamente 75.000 km<sup>2</sup> y la de la región Metropolitana es de 15.000 km<sup>2</sup>.

#### b) Situación B

Según el Censo del año 2002, la superficie de la región de Tarapacá es aproximadamente 60.000 km² y la de la región del Maule es 30.000 km².

	Comparación por diferencia	Comparación por cuociente
Situación A		
Situación B		

08-10-12 12:49

**Unidad 1** Razones y porcentajes



## **Razones y Porcentajes**

En la tabla se muestran, en porcentajes (%), los hogares que poseen distintos aparatos tecnológicos, ello, respecto de la población (número de habitantes) que representa el 100%.

Equipamiento de los hogares (%)							
Tipo de equipamiento	Censo 1992	Censo 2002					
TV color	52,6%	87,0%					
Video grabadora, pasa películas	17,9%	35,7%					
Mini componente y/o equipo de alta fidelidad	30,3%	66,4%					
Lavadora (programable y otra)	48,2%	74,8%					
Refrigerador	54,6%	82,1%					
Horno microondas	4,2%	30,0%					
Teléfono celular	1,0%	51,0%					
Teléfono red fija	23,6%	51,5%					
Sin equipamiento	6,2%	5,2%					

Fuente: INE. Cuadro. equipamiento de los hogares. 1992-2002.

El Censo del 2002, muestra el notable incremento del equipamiento en el hogar ocurrido en el decenio 1992 – 2002.

- ¿Qué porcentaje de los hogares tiene televisión a color al año 2002?
- ¿De cuánto fue el aumento en el porcentaje respecto al año 1992?

## Interpretando porcentajes

Respecto al teléfono celular, la información señala que al año 2002, aproximadamente el 50% de los hogares cuenta con teléfono celular.

Representando ese porcentaje como una razón, tenemos:  $\frac{50}{100}$ 

Es decir, al año 2002 de cada 100 hogares, 50 tiene teléfono celular.

Podemos representar un porcentaje como una razón de consecuente 100.

Por ejemplo: 
$$20\% = \frac{20}{100}$$
;  $35\% = \frac{35}{100}$ ;  $50\% = \frac{50}{100}$ 



Representando gráficamente la relación anterior, podemos observar que esta cantidad corresponde a la mitad de la cuadrícula.



Esto significa que: 
$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Entonces, 
$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

En un curso de 40 estudiantes, el 50% son varones, ¿cuántos estudiantes son de sexo masculino?

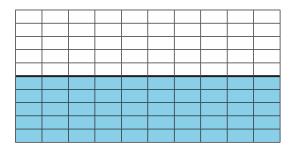
Rápidamente, podemos calcular ese porcentaje. Si sabemos el total de estudiantes y que el 50% corresponde a  $\frac{1}{2}$ , es decir, la mitad, entonces multiplicamos por  $\frac{1}{2}$ .

40 x 
$$\frac{1}{2}$$
 =  $\frac{40}{2}$  = 40 : 2 = 20 estudiantes son varones.

Para calcular el 50% de una cantidad, basta con establecer la mitad de esa cantidad.

#### ¿Es el 50%, igual a 0,5?

En el diagrama vemos que 50% es igual a un medio. Sabemos que un medio es 1:2=0,5



Entonces, 
$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Esto significa que también podemos multiplicar por 0,5 cuando calculemos el 50% de una cantidad.

La etiqueta de un pantalón marca \$20.000 y está con un fabuloso descuento del 50%. ¿Cuánto cuesta el pantalón?

Al 100% del valor del pantalón habrá que descontarle el 50%. Como ya sabemos que para realizar este cálculo podemos multiplicar por 0,5, resolvemos:

$$20.000 \times 0.5 = 10.000,0$$

Luego del descuento, el pantalón cuesta \$10.000, es decir la mitad de precio inicial.



En el siguiente sitio web, se encuentra un breve resumen sobre Razones y Porcentajes, que le ayudarán en su repaso de estas materias.

http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/prope/htmlb/SEC\_29.HTM

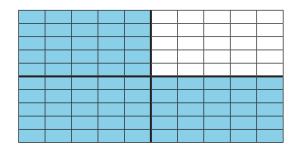


En la tabla de la página 74, también podemos leer que al año 2002, aproximadamente el 75% de los hogares tiene lavadora. Esto, significa un considerable aumento respecto al Censo del año 1992, donde vemos que, aproximadamente, un 50% de los hogares tenía este electrodoméstico.

Escrito como razón, el 75% corresponde:  $\frac{75}{100}$ , simplificando, nos queda  $\frac{3}{4}$ .

Es decir, al año 2002, de cada 100 hogares, 75 tiene lavadora o, de cada 4 hogares, 3 tiene lavadora.

En el diagrama observamos que la zona pintada corresponde a "tres cuartos" del total.



Luego, 
$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Sabemos que 3:4=0,75

Entonces, 
$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Si quisiéramos saber cuánto es el 75% de 2.000, podemos multiplicar:

$$2.000 \times \frac{3}{4} = \frac{6.000}{4} = 1.500$$

También, podríamos multiplicar 2.000 x 0,75 = 1.500

Ambos procedimientos nos llevan a concluir que el 75% de 2.000 es 1.500.

#### El 25%

La información acerca del tabaquismo de la página 69, señala que, lamentablemente, el 25% de los menores de 15 años en Chile, fuma.

Observamos que la zona pintada en el diagrama corresponde a "un cuarto" del total.



Luego, 
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Sabemos que 1 : 4 = 0,25

Entonces, 
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$$



# Actividad grupal

Representen como razón cada porcentaje, luego simplifiquen y escriban el número decimal correspondiente:

La tabla, informa el porcentaje aproximado de cada elemento tecnológico presente en los hogares chilenos, en el Censo 2002.

Información	Razón	Razón simplificada	Número decimal
Televisor Color 90%			
Videograbadora 35%			
Refrigerador 80%			
Horno Microondas 30%			
Teléfono red fija 50%			

Responda las siguientes preguntas:

1 Según la información del censo (página 74):

Podemos decir que en 10 años el contar con teléfono celular se "ha incrementado en, aproximadamente, un 50%".

Equipamiento de los hogares (%)								
Tipo de equipamiento Censo 1992 Censo 2002								
Teléfono celular	1,0	51,0						

¿Está de acuerdo con esta conclusión?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_

¿Por qué? \_

- 2 El crecimiento de un 50% en la cantidad de teléfonos celulares, significa que:
  - a) se ha duplicado la cantidad de teléfonos celulares.
  - b) 50 personas más tienen teléfono.
  - c) la cantidad de teléfonos se ha reducido en 50.
  - d) ha aumentado 50 veces la cantidad de teléfonos celulares.
- 3 Observe la tabla de la página 74 y responda las preguntas:
  - a) ¿Cuál es el elemento tecnológico de mayor aumento en el decenio 1992 2002?
  - ¿Cuál o cuáles de los elementos tecnológicos duplicaron su presencia en el decenio 1992 – 2002?



## Cálculo de porcentaje

#### ¿Cómo calcular porcentajes?

Leamos el siguiente texto:



Las preguntas que se desprenden de esta información son:

- ¿Cuántas mujeres hay en el país al año 2002?
- ¿Cuántos hombres hay en el país al año 2002?

Para saberlo, tenemos que calcular cada porcentaje del total de personas del país.

Entonces, nos queda un 51% de mujeres y un 49% de varones. Sabemos que el 51% puede representarse como 0,51% con número decimal y que 49% puede representarse como 0,49%.

Entonces, con ayuda de la calculadora, planteamos:

	Operación	Cantidad
Mujeres	15.116.435 <b>x 0,51</b> =	7.709.382
Varones	15.116.435 <b>x 0,49</b> =	7.407.053

Para calcular un porcentaje, se puede multiplicar la cantidad por el decimal correspondiente al porcentaje.

**78** 



Lea el siguiente texto y calcule con la calculadora, el porcentaje correspondiente:



#### **BUENAS NOTICIAS LABORALES**



Viene un proyecto de Teletrabajo, que promueve el trabajo desde la casa para hombres y mujeres, lo que permite ahorrar tiempos de desplazamiento y permite compartir más tiempo con la familia. En los próximos años, se crearán 200 mil empleos para los trabajadores del país y de esa cantidad, el 60% será para mujeres.

¿Cuántos empleos para mujeres se crearán en el país?

Operación	Cantidad
200.000 x	

## Porcentajes en el comercio

Frecuentemente, nos encontramos en el comercio con anuncios de este tipo.

Si en la etiqueta, un par de zapatillas deportivas tiene un precio de \$32.000:

- ¿A cuánto dinero corresponde el descuento?
- ¿Cuál es el precio final de las zapatillas?

Sabemos que 25% = 
$$\frac{25}{100}$$
 y eso es igual a  $\frac{1}{4}$ .

Entonces, la situación se reduce a calcular un cuarto de 32.000 y luego descontar ese valor del precio inicial.

$$32.000 \times \frac{1}{4} = \frac{32.000}{4} = 8.000 \text{ es el } 25\% \text{ de } 32.000.$$

Otra forma de calcular el 25% de 32.000, es la siguiente:

Multiplicar 32.000 por el número decimal correspondiente a  $\frac{1}{4}$  .

Sabemos que 25% = 
$$\frac{25}{100}$$
 =  $\frac{1}{4}$  = 0,25

Entonces, planteamos:  $32.000 \times 0.25 = 8.000$  es el valor del descuento.



Ya tenemos la respuesta a la primera pregunta. Ahora, para saber el precio final de las zapatillas debemos restar el valor del descuento al precio original:

32.000 - 8.000 = \$24.000. Ese es el precio final a pagar por las zapatillas.



Utilice la calculadora para resolver cada situación.

Artículo	Precio original	% descuento	Precio final	Ahorro (\$)
- 🛞	\$ 12.000	50%		
THERE	\$ 25.000	10%		
		50%	\$ 5.500	
- American		25%	\$ 6.000	
	\$ 8.000		\$ 7.200	
	\$ 21.000	30%		
	\$ 49.000	20%		
1	\$ 24.000	35%		



## Porcentaje que representa una cantidad respecto de otra

Conocer los porcentajes y saber cómo calcularlo, también nos sirve para resolver situaciones como la siguiente:

Un trabajador, recibió a final de mes su liquidación de sueldo:

#### LIQUIDACIÓN DE SUELDO MENSUAL

Razón Social: Centro Médico Ltda. RUT: <u>92.000.450-1</u>

Nombre Trabajador: Nelson Pereira RUT Trabajador: 8.456.390-k

Haberes		Descuentos previsionales		
Sueldo base:	eldo base: \$ 240.000		\$ 16.800	
Movilización:		A.F.P.	\$ 28.800	
Líquido a pagar:		Total de descuentos		

Esta persona, desea saber qué porcentaje de su sueldo le descuentan, por ley, para salud y para previsión.

- ¿Cómo podemos calcular el porcentaje que representa cada cantidad dentro del sueldo?
- Hecho los descuentos, ¿cuánto es el sueldo líquido que recibe esta persona?

Si planteamos las razones, tendremos lo siguiente:

Como no conocemos el porcentaje, la razón llevará una incógnita que la designamos con una letra cualquiera, en este caso con la letra  $a_i$  entonces:

$$\frac{a}{100} = \frac{16.800}{240.000}$$

Multiplicamos por 100 la cantidad que queremos expresar como % y la dividimos por el total.

Tenemos:  $a = \frac{16.800 \times 100}{240000} = 7\%$ . Ese es el porcentaje de descuento por concepto de salud.

Para determinar el porcentaje que se descuenta por previsión, procedemos de la misma forma:

$$\frac{a}{100} = \frac{28.800}{240.000}$$



Multiplicamos por 100 la cantidad que queremos expresar como % y la dividimos por el total.

Tenemos:  $a = \frac{28.800 \times 100}{240.000} = 12\%$  . Ese es el porcentaje de descuento por concepto de previsión.

Calcule cuál es el sueldo líquido de este trabajador.







Resuelvan las siguientes situaciones:

Teresa, trabaja en una empresa de alimentos y debido a su buen desempeño, en el sueldo del mes le han agregado un bono. Ella, quiere saber qué porcentaje del sueldo corresponde al bono.

Haberes	Descuentos			
Sueldo base:	Salud	12%		
Bono desempeño:	A.F.P.	7%		
Sueldo bruto:	\$ 280.000			
Líquido a pagar:				

Determinen el porcentaje que representa el bono dentro del sueldo base, del sueldo bruto y del sueldo líquido.



b) Calculen el dinero que deben descontar por concepto de salud, desde el sueldo bruto.



Calculen el dinero que deben descontar por concepto de AFP.



d) Calculen el sueldo líquido que recibirá Teresa, luego de hacer los descuentos.



08-10-12 12:50



## Un famoso porcentaje: el IVA

La familia Navarrete, requiere con urgencia comprar una lavadora. Fueron a la tienda a comprarla, entregando \$250.000, pero le dijeron que faltaba el dinero del IVA.

- ¿Qué es el IVA?
- ¿Cuánto dinero debe pagar por la lavadora la familia Navarrete?



El I.V.A. (Impuesto al Valor Agregado) es un impuesto que se agrega a los artículos y que debe pagar el comprador. En Chile, este impuesto es de un 19%.

Entonces, al precio de la lavadora hay que agregarle el 19% de ese precio.

a) Calculemos el IVA.

Si la lavadora cuesta \$250.000, tenemos que calcular el 19% de ese precio y agregarlo para obtener el precio final.

Sabemos que el 19% = 
$$\frac{19}{100}$$
 = 0,19

Multiplicamos  $250.000 \times 0.19 = $47.500$ , por concepto de IVA.

b) Calculemos el precio final.

Agregamos este impuesto (\$47.500) al precio de la lavadora (\$250.000):

$$250.000 + 47.500 = $297.500$$
, precio a pagar.

En el siguiente sitio web, del Servicio de Impuestos Internos (SII), usted podrá leer una interesante reseña sobre los impuestos. Dentro de la página encontrará, además, varios links (por ejemplo: Planeta SII), que lo llevarán a navegar para aprender más sobre el IVA, de manera interactiva. Hay varios juegos que le servirían para aclarar conceptos relacionados.

http://www.siieduca.cl//familia/sobre.php



• Apliquemos lo anterior a otro ejemplo:

Un televisor tiene un valor de \$300.000. Al agregarle el IVA, ¿cuál es el precio a pagar?

a) Calculamos el IVA.

Sabemos que 
$$19\% = \frac{19}{100} = 0,19$$

Multiplicamos  $300.000 \times 0,19 = $57.000$ 

b) Calculamos el precio final, sumando el valor del IVA al precio original:

300.000 + 57.000 = \$357.000. Precio que debe pagar por el televisor.



Resuelva y responda las siguientes situaciones:

1 El precio de un pantalón es de \$21.500 más I.V.A.

a) ¿Cuánto se paga por el I.V.A.?

b) ¿Cuál es el precio final del pantalón?



2 El precio de un medicamento es de \$2.340, con IVA. ¿Cuál será su precio, sin IVA?



3 Un artículo costaba, \$4.000, sin IVA. Rebajan su precio total en un 15%. ¿Cuánto costará con IVA, luego de la rebaja?



## **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 34 puntos



En la actualidad, las mujeres son una parte muy importante de la fuerza laboral del país. Lea el siguiente diálogo aparecido en un diario de circulación nacional:

# Estadísticas de Chile Mujeres en la pega

- Oiga, Inesita, así que sacaron la cara por el trabajo.
- No le entiendo, don Tiburcio.
- No se haga la lesa, oiga. Las mujeres están aperrando con tutti en la pega.
- Ya entiendo. Usted se refiere a que el 44,5% trabaja o busca trabajo, ¿no?
- ¡Claro, casi la mitad de toda la población! Pero, ¿cuántas féminas son?
- 2.995.047 mujeres.
- ¡Chuu! Oiga, ¿y en qué área la están llevando?

- En el comercio, con (24,0%), servicio doméstico con (14,6%) y enseñanza con (12,5%).
- ¡Mish! ¿Sabe cuántas horas trabajan? Es que a mi viejita ni la veo.
- Dos de cada 10 mujeres trabajan entre 31 y 44 horas semanales, mientras que 1 de cada 10 lo hace entre 46 y 50 horas en el mismo período.
- Pero con tanto trabajo las mamurris dejan al olvido a sus chicocos.



- No, don Tiburcio. De cada 10 evas asalariadas, 7 reciben permiso de maternidad. Las otras 3 acceden a guardería infantil.
- Mi viejita trabaja por cuenta propia.
- Entonces, pertenece a la quinta parte de las mujeres ocupadas.
- Las chilenas siempre se la juegan. Por eso le digo a mi mami: Si el amor fuera trabajo, no habría cesantía.

En base a la información leída realice las siguientes actividades:

a) Complete la tabla: (2 puntos c/u).

Situación	Razón
Mujeres que trabajan entre 31 y 44 horas semanales.	
Mujeres que trabajan entre 46 y 50 horas semanales.	
De cada 10 mujeres asalariadas, 7 reciben permiso de maternidad.	
De cada 10 mujeres, 3 acceden a guardería infantil.	
Aproximadamente, el 45% de las mujeres trabaja o busca trabajo.	
De las mujeres que trabajan fuera del hogar, el 24% lo hace en el comercio.	



b) La información señala que son 2.995.047 las mujeres que trabajan en forma remunerada. Con esa información, realice los cálculos y complete la tabla: (2 puntos c/u).

Tipo de trabajo y porcentaje	Mujeres
El 24% de las mujeres trabaja en el comercio.	
Aproximadamente, el 15% de las mujeres trabaja en servicio do- méstico.	
Aproximadamente, el 13% de las mujeres trabaja en enseñanza.	

Resuelva las siguientes situaciones: (4 puntos c/u).

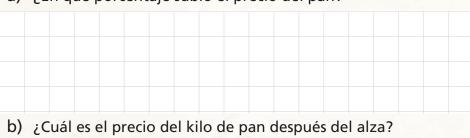
- Don Andrés está contento porque le aumentaron el sueldo en un 6%. Su sueldo, sin el aumento, es de \$380.000.
  - a) ¿En qué cantidad de dinero le aumentaron el sueldo a don Andrés?



b) ¿Cuánto recibirá como sueldo Don Andrés, con el aumento?



- 3 En la panadería de don Beno, el kilo de pan subió \$120. Si el kilo costaba \$700:
  - a) ¿En qué porcentaje subió el precio del pan?





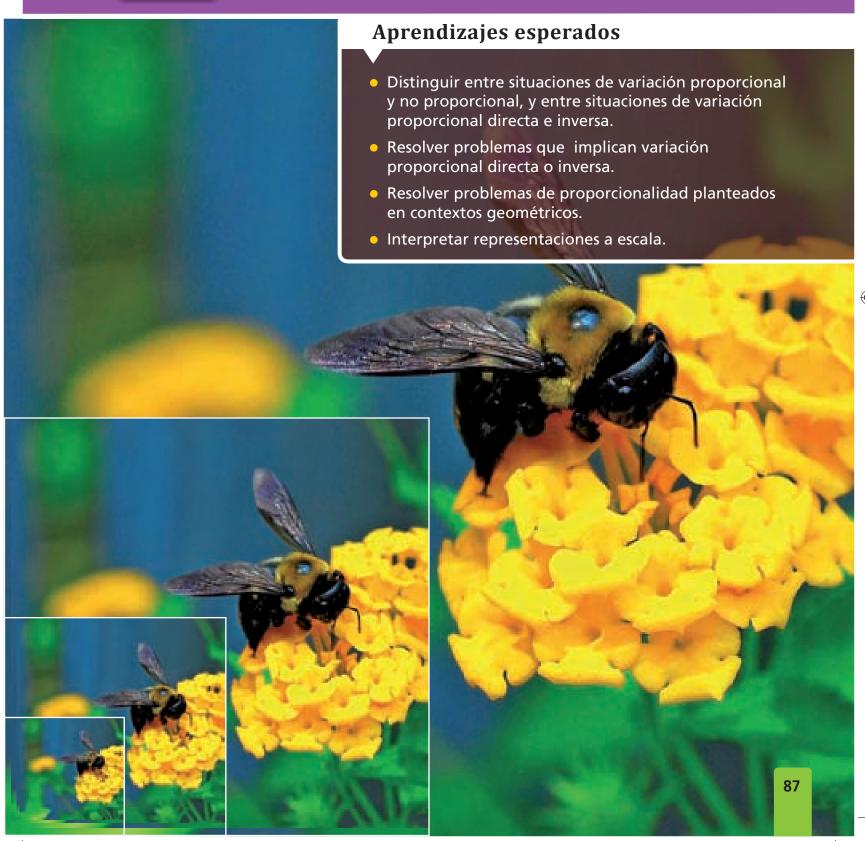
86

Módulo 2 Razones, porcentajes y proporciones



Unidad 2

# Variaciones proporcionales





# Una paradoja preocupante: Escasez de agua, problema mundial

Aunque, aproximadamente, el 75% de la superficie terrestre está cubierta por agua, sólo el 0,01% es apta para el consumo humano. La ONU (Organización de Naciones Unidas), calcula que alrededor de 2.000.000.000 (dos mil millones) de personas en el mundo viven en zonas con escasez de agua.

La sequía, el aumento de la población, la sobreexplotación económica y la mala gestión de recursos han convertido la escasez de agua potable en un grave problema planetario cuyo futuro se prevé aún más funesto.

El 60% de la población, vivirá en regiones con escasez de agua en 2025 si se mantiene el actual ritmo de consumo, que duplica al del crecimiento demográfico, advirtió la ONU.

Más de una sexta parte de la población mundial, carece de acceso asequible a ese recurso e "incluso, en lugares donde aparentemente hay agua suficiente, los pobres tienen dificultades para acceder a ella", denunció el Consejo para el Acceso al Agua y a Recursos Sanitarios (WSSCC).

África, es la región del mundo con menos acceso al agua, según el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD). En esa zona, un 45% de la población carece de agua en buenas condiciones y un 65% no tiene saneamiento adecuado, lo que hace que la mitad de los 1,8 millones de niños y niñas que mueren cada año en todo el mundo por diarreas y otras enfermedades relacionadas con la falta de higiene, sean africanos.

Según el PNUD, una de las causas es la mala gestión, como en Etiopía, cuyo gobierno destina veinte veces más dinero al gasto militar que a la mejora de los recursos hídricos.

También hay pesimismo en el mundo árabe, donde se prevé que la reducción de las lluvias en un 20% por el cambio climático, unida al aumento de la población, reduzca a la mitad la cantidad de agua por persona en 2050.

**Fuente:** http://www.elsiglodetorreon.com.mx/noticia/266275.html

- ¿Qué relación existirá entre el aumento de la población y la escasez de agua?
- ¿Cuánta agua llega a desperdiciar una llave que gotea constantemente?

En esta unidad, aprenderemos a reconocer cuándo dos o más variables se relacionan y cuándo esta relación es proporcional. Conocerlas nos ayudará a resolver muchas situaciones relacionadas con nuestro trabajo y actividades en general.



### Estableciendo relaciones entre dos variables

#### ¿Cómo se determinan las pulgadas en un televisor?

Así como los clavos, las maderas y otros materiales, los televisores también se miden por pulgadas.



La medida pulgadas se utiliza en los televisores para indicar la medida de la pantalla, pero considerando la diagonal. Así como lo muestra la figura.

¿A cuántos centímetros equivale la medida de la pantalla de este televisor?

Una pulgada, es una unidad de medida del sistema de medición inglés y equivale, aproximadamente, a 2,5 cm.

Podemos establecer una tabla de equivalencias entre pulgadas y centímetros:

centímetros	2,5										
pulgadas	1	2	3	4	5	10	19	21	25	32	42

Con la calculadora, encuentre las equivalencias mencionadas y complete la tabla anterior:

- Si seguimos aumentando en la columna de las pulgadas, ¿podemos saber con anticipación su equivalencia en centímetros?

En este caso, las variables que se relacionan son pulgadas y centímetros. De modo que, si una aumenta la otra también aumenta y viceversa.



## ¿Todas las variables cumplen alguna relación?

Existen variables cuyo comportamiento no depende de la otra variable. Por ejemplo:



¿Podemos saber cuál será su peso y su talla cuando tengan el doble y el triple de la edad actual?

Luis	13 años	20 años	34 años	36 años	48 años
Peso					
Talla					

Carla	12 años	20 años	22 años	33 años	44 años	55 años	48 años
Peso							
Talla							

Al intentar completar las tablas, nos encontramos con que no podemos establecer una relación entre esas variables.

En estos casos, de acuerdo a la experiencia podríamos estimar, pero no predecir, es decir, no podemos decir exactamente como serán sus medidas.

Las variables peso, estatura son relativas entre las personas, dependen de distintos factores. No siguen un patrón único como el caso de otras variables.

En estas variables: peso, edad, talla, hay variación, pero no es proporcional.



## **Relaciones proporcionales**

La señora Alicia es una microempresaria y como tal, ocupa frecuentemente el teléfono para llamar a sus clientes. Su plan telefónico, es el siguiente:

 Complete la tabla con el costo de las llamadas, según la duración en segundos.

A otras compañías				
Segundos	Costo (\$)			
1	\$ 2,50			
2				
3				
4				
5				
6				
7				



Observando la tabla, comprobamos que si 1 segundo de llamada telefónica cuesta \$2,50, 2 segundos costarán el doble, 3 segundos el triple y así sucesivamente.

En este caso, las variables tiempo de la llamada y costo en dinero están relacionadas de modo que si una aumenta, la otra también aumenta.

- ¿Podríamos predecir cuánto pagará la señora Alicia por una llamada de 1 minuto? ¿Por una llamada de 10 minutos?
- Una tienda ofrece ropa en cierto precio, pero a partir de tres prendas se considera como venta al por mayor y se da un precio especial.

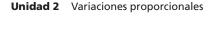
Precio	\$500	\$1.000	\$1.350	\$1.800
Número de prendas	1	2	3	4

Observe esa variación en la tabla:

- a) ¿Se podría calcular cuánto costarán 7 prendas de ropa? ¿Por qué?
- b) ¿Existe relación proporcional entre estas variables? Comparta sus conclusiones.

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Cuando las variables aumentan o disminuyen sus valores en la misma medida, se habla de relación proporcional. Por ejemplo:

- Si la variable A, aumenta al doble, la variable B, también aumentará al doble.
- Si la variable A, disminuye a la mitad, la variable B, también disminuirá a la mitad.





91



## Relación proporcional directa

¿Será proporcional la relación variable costo (\$) y la variable duración de las llamadas?

Para comprobarlo, procedemos a establecer el cuociente entre los pares de valores de las respectivas variables:

Segundos	Costo (\$)	Cuociente
1	\$ 2,50	2,50 : 1 = <b>2,5</b>
2	\$ 5,00	5,00 : 2 = <b>2,5</b>
3	\$ 7,50	7,50 : 3 = <b>2,5</b>

En todos los pares de valores de las variables, el cuociente es el mismo.

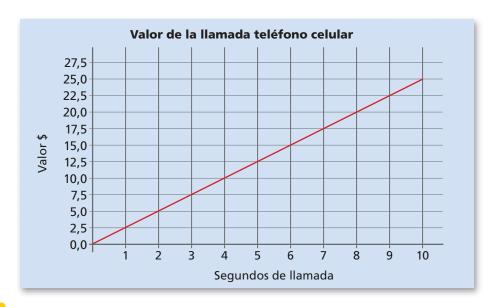
En este caso, 2,5 es la constante de proporcionalidad en esta relación.

Observamos que, al aumentar los segundos al doble, triple, cuádruple, etc., los valores del costo aumentaron de la misma forma. Lo mismo, si en la tabla leemos los valores desde abajo hacia arriba, vemos que al disminuir un valor de una variable, el valor respectivo de la otra variable disminuye en la misma medida.

Segundos	Costo (\$)
1	\$ 2,50
2	\$ 5,00
3	\$ 7,50
4	\$ 10,00

Cuando una variable aumenta o disminuye su valor y la otra variable aumenta o disminuye en la misma proporción, hablamos de **proporcionalidad directa**.

El gráfico que describe el comportamiento de las variables es el siguiente:



En el gráfico, la proporcionalidad directa se caracteriza por una línea recta que pasa por el origen.



## Actividad grupal



Segundos	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio	1,50							

- 2 De acuerdo a los valores de la tabla, respondan las preguntas:
  - a) ¿Cuánto debe pagar por una llamada que dura 30 segundos?
  - b) ¿Cuánto debe pagar por una llamada que dura 1 minuto?
  - c) ¿Podemos saber cuánto se pagaría por una llamada de 5 minutos?
  - d) ¿Qué tipo de proporcionalidad se cumple entre las variables?
- 3 En el siguiente gráfico, muestren la relación entre las dos variables:
  - a) Señalen los valores de las variables en los ejes.
  - b) Grafiquen la línea que une la intersección de los puntos.



- c) ¿Qué tipo de línea determinan la intersección de los puntos?
- d) ¿Qué tipo de relación proporcional muestra el gráfico?

05\_Mat3\_M2\_U2.indd 93





93



## Otras variables que cumplen una relación proporcional

#### Perdiendo gota a gota

La pérdida de agua en los hogares, es un tema que debería preocuparnos a todos. En muchas casas hay alguna llave goteando, ¿sabe cuánta agua se llega a desperdiciar por esta causa?





- ¿Qué cantidad de agua se desperdicia en un minuto?
- $\bullet$  ¿En cuánto tiempo se llega a desperdiciar un litro de agua? Recuerde que 1.000 ml equivalen a 1  $\ell$ .
- ¿Cuáles son las variables que se están relacionando?

De acuerdo al gráfico, podemos establecer la siguiente relación:

Tiempo (minutos)	ml de agua desperdiciada
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100

Al establecer el cuociente entre el valor de una variable y su respectivo valor en la otra variable, encontramos lo siguiente:

20 : 1 = 20 40 : 2 = 20

60:3=20

El valor 20 es la constante de proporcionalidad.

Estas variables se relacionan en forma directamente proporcional, pues entre más minutos de goteo de una llave, más agua se desperdiciará.



### La U.F. (Unidad de Fomento)

Al establecer la equivalencia entre la Unidad de Fomento y su valor en pesos, también encontramos que estas variables se relacionan.

Esta casa, tiene un precio de 1.500 UF, ¿cómo podemos saber su valor, en pesos?



Si don Patricio tiene 25 millones de pesos para comprarla, ¿le alcanza con ese dinero?, ¿le sobra?, ¿cuánto?

La Unidad de Fomento (UF), es una unidad financiera reajustable de acuerdo con la inflación (medida según el Índice de Precios al Consumidor IPC). Actualmente, el uso de la unidad de fomento se aplica a todo tipo de préstamos bancarios o financieros de privados o particulares, inversiones (depósitos a plazo u otros instrumentos reajustables).

## Actividad grupal

1 Con calculadora, realicen las equivalencias y completen la tabla:

Valor (\$)	21.800							
UF	1	2	3	4	5	6	7	8

- a) ¿Cuántos pesos son 10 UF? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuántos pesos son 100 UF? \_\_\_\_\_
- c) Si seguimos aumentando en la columna de las UF, ¿podemos saber con anticipación su equivalencia en pesos?
- d) ¿Cuántas UF son \$872.000? \_\_\_\_\_
- e) ¿Cuántas UF son \$1.853.000? \_\_\_\_\_
- f) ¿Qué variables son las que se relacionan? \_\_\_\_\_
- g) ¿Cuál es la relación que se establece entre esas variables? \_



2 Calculen el cuociente entre todos los pares de valores de las variables y completen:

UF	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor (\$)	21.800							
Cuociente								

3 Grafiquen los ejes con sus respectivos valores.

a) ¿Qué tipo de proporcionalidad se establece en esta situación?

b) ¿Qué caracteriza a este tipo de relación proporcional?



## Cálculo del término desconocido en una proporción directa

Para calcular en forma rápida una situación de proporcionalidad directa, procedemos de la manera siguiente:

$$\frac{21.800}{43.600} = \frac{1}{2}$$

Pesos	UF
21.800	1
43.600	2

Se lee: "21.800 es a 43.600 como 1 es a 2"

Los valores marcados con rojo son los extremos y los valores en negro son los medios. En toda proporción, se cumple: **producto de extremos es igual a producto de medios**:

$$(21.800 \times 2) = (43.600 \times 1)$$
  
extremos medios

Con esta propiedad fundamental, podemos resolver problemas de proporcionalidad.



Por ejemplo: ¿a cuántos pesos equivalen 25 UF?

UF	Pesos
1	21.800
25	а

El valor que desconocemos lo hemos designado por a y ahora aplicamos la propiedad fundamental:

"Producto de extremos es igual a producto de medios"

 $1 \times a = 21.800 \times 25$ . Nos queda:  $a = (21.800 \times 25) : 1 \text{ y eso es } $545.000$ 

Apliquemos las proporciones a la cocina.

En una receta, se incluyen 3 huevos por cada 12 personas. ¿Cuántos huevos se necesitarán si se desea preparar la receta para 20 personas?

Personas	Huevos
12	3
20	а

Si para 12 personas se necesitan 3 huevos, para 20 personas se necesitarán más huevos. Entonces, existe proporcionalidad directa entre estas variables.

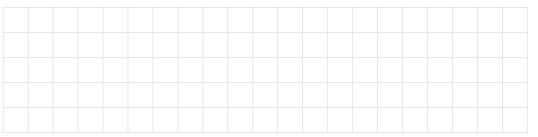
Producto de extremos es igual producto de medios, entonces:

12 x 
$$a = 20$$
 x 3  $\rightarrow a = \frac{20 \times 3}{12} = \frac{60}{12} = 5$ . Se necesitarán 5 huevos para 20 personas.

Realice los siguientes ejercicios:

1 Los médicos veterinarios, han determinado que un año de vida de un perro equivale a siete años de vida de una persona. ¿Cuántos años nuestros tiene un perrito de 6 años perrunos?





2 Una receta médica, indica la siguiente dosis de medicamento: 5 miligramos por cada 10 kilos de peso. ¿Qué cantidad se le debe suministrar a una persona que pesa 65 kg?





3 Si 250 gr de queso cuestan \$548, ¿cuánto cuesta  $\frac{3}{4}$  kg?

Tenga presente que:  $250 \text{ gr} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ kg}$ 

750 gr = 
$$\frac{3}{4}$$
 = 0,75 kg



4 La luz, recorre 300.000 km en un segundo. ¿Qué distancia cubre en un minuto?





Un dólar equivale, aproximadamente, a \$550 pesos chilenos. ¿Cuántos dólares se pueden obtener con \$42.000 chilenos?



- 6 Una receta para medio kilo de galletas, indica lo siguiente:
  - a) Según esta receta, ¿cuánta harina se necesita para hacer 1,5 kg de galletas?



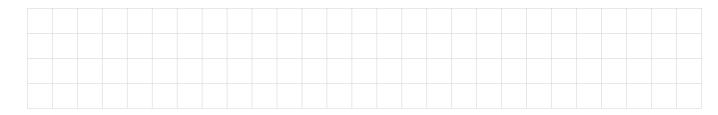
#### Galletas de almendras

#### Ingredientes:

- 200 gramos de azúcar
- 600 gramos de harina
- 60 gramos de almendra molida
- 150 gramos de mantequilla
- 12 huevos
- Ralladura de limón.



b) Para mantener la proporción, si se utilizan 1.200 gr de harina, ¿qué cantidad de almendras molidas se necesitarán?



lacktriangle



## Relación proporcional inversa

Un grupo de amigos, organiza un paseo al Parque Torres del Paine. El bus que arrendarán les cobra \$120.000. Los organizadores, hicieron un estudio del precio que debe pagar cada uno de los amigos, según el número de participantes.



• Los cálculos se muestran en esta tabla. Complete los valores que faltan.

Pasajeros	1	2	3	4	10	12	15	20
Precio pasaje (\$)	120.000	60.000						

- ¿Qué ocurre con las variables en esta situación?
- ¿Qué pasa con el valor del pasaje al aumentar la cantidad de pasajeros?
- ¿Cuántas personas deben ir para que el pasaje tenga un valor de \$2.000?

Observamos que: a mayor cantidad de pasajeros, menor precio a pagar. Es decir, entre estas magnitudes si una aumenta, la otra disminuye y viceversa.

Además, se produce otra característica:

El producto entre los valores respectivos de las variables, es constante.

$$1 \times 120.000 = 120.000$$

$$2 \times 60.000 = 120.000$$

$$3 \times 40.000 = 120.000$$

$$5 \times 24.000 = 120.000$$

05\_Mat3\_M2\_U2.indd 99

Pasajeros	Precio pasaje
1	120.000
2	60.000
3	40.000
4	30.000
5	24.000
6	20.000

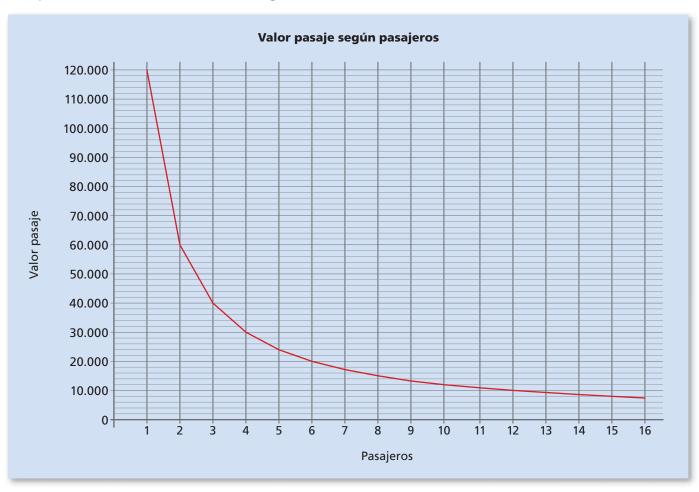
En este caso, el precio del arriendo del bus es el valor constante.

**Unidad 2** Variaciones proporcionales



Observamos que estas variables se comportan de diferente forma. Si una aumenta en un factor determinado, la otra disminuye en ese mismo factor y viceversa.

Si representamos esta relación en un gráfico, obtendremos:



Cuando una variable aumenta y la otra variable disminuye en la misma proporción o una variable disminuye y la otra aumenta en la misma proporción, hablamos de **proporcionalidad inversa**.

La línea que une la intersección de los puntos, es una curva descendente llamada rama de hipérbola.







Resuelva el siguiente ejercicio:

Para un rectángulo de área 24 cm<sup>2</sup>, ¿cuáles pueden ser las medidas de sus lados? Verifique con el producto entre las variables:

Largo	Ancho	Área
24 cm	1 cm	24 cm <sup>2</sup>
12 cm	2 cm	24 cm <sup>2</sup>
		24 cm <sup>2</sup>
		24 cm <sup>2</sup>

a) En la columna del largo, ¿qué ocurre a medida que nos desplazamos hacia abajo?

b) En la columna del ancho, ¿qué ocurre a medida que nos desplazamos hacia abajo?

c) ¿Qué tipo de relación proporcional se establece entre el largo y el ancho al mantener constante el área?

## Cálculo del término desconocido en una proporción inversa

Un automóvil, demora 0,5 horas en recorrer una distancia en carretera a una rapidez promedio de 40 km/h. ¿Qué rapidez promedio necesita el vehículo para regresar en 0,2 horas?

Para calcular el término desconocido en una situación de proporcionalidad inversa, procedemos de la manera siguiente:

Horas	Rapidez
0,5	40
0,2	а

En este caso, para mantener la igualad de las razones, se invierte uno de los valores.

Horas	Rapidez
0,5	а
0,2	40

Aplicamos la propiedad fundamental: "producto de extremos es igual a producto de medios".

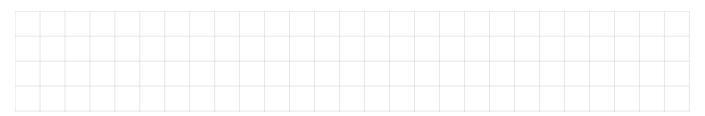
$$a \times 0.2 = 0.5 \times 40$$
  $\longrightarrow$   $a = \frac{0.5 \times 40}{0.2} = 100.$ 

Por lo tanto, la rapidez promedio del automóvil debe ser de 100 km/h para regresar en 0,2 horas.



Resuelva las siguientes situaciones:

En un gallinero hay 300 gallinas que se comen 600 kilos de maíz en 20 días. Si se compran 100 gallinas más, ¿en cuánto tiempo comerán la misma cantidad de maíz?



2 Seis llaves se demoran 10 horas en llenar un estanque de 400 m³ de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro llaves en llenar 2 estanques de 500 m³ cada uno?



Un campesino tiene pasto suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar a 500 vacas con la misma cantidad de pasto?



4 Una cuadrilla formada por 7 trabajadores, repara un muro de un galpón industrial en 6 días. ¿Cuántos trabajadores debe tener la cuadrilla para hacer el mismo trabajo en 7 días?







## Aplicando proporcionalidad directa

Observe las fotografías:

Foto original.



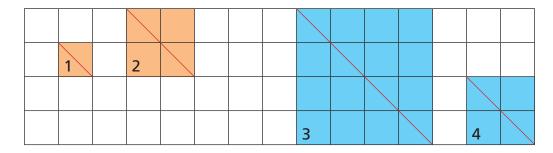
Foto reducida a la cuarta parte.



- Al reducir la foto, ¿se mantiene la proporcionalidad entre la señora y el niño?
- En la foto reducida, ¿es proporcional la distancia de las personas al mar?
- ¿Cuál es la razón entre el ancho y el alto de la foto grande?
- ¿Cuál es la razón entre el ancho y el alto de la foto reducida?

¿Cómo comprobamos si se mantiene la proporcionalidad entre figuras que han sido ampliadas o reducidas?

El cuadrado N° 1, ha sido ampliado y resultó el cuadrado N° 2.



Consideremos la pareja de cuadrados 1 y 2:

Medimos un lado de cada cuadrado y la diagonal.

103

Registramos los datos en una tabla.

	Cuadrado 1	Cuadrado 2	Cuociente
Lado	0,9 cm	1,8 cm	
Diagonal	1,3 cm	2,6 cm	

- Calcule el cuociente en cada relación y escríbalo en la tabla.
- ¿Qué relación descubre?

Repita el procedimiento con los cuadrados 3 y 4:

	Cuadrado 3	Cuadrado 4	Cuociente
Lado			
Diagonal			

¿Qué relación descubre?

## Actividad grupal

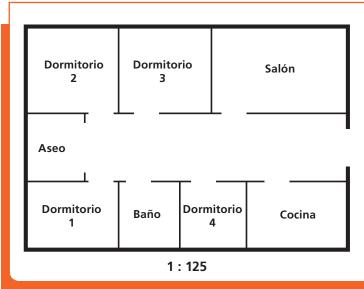
Completen la tabla con los valores que faltan y respondan:

Lado	Perímetro	Área
1 cm	4 x 1 = 4 cm	$1 \times 1 = 1 \text{ cm}^2$
2 cm	4 x 2 = 8 cm	$2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$
3 cm		
4 cm		
5 cm		

- a) ¿Cómo varía el perímetro de un cuadrado si se hace variar la medida del lado?
- b) ¿Cómo varía su área?
- c) ¿Encuentran alguna relación entre la variable medida del lado y el área? Descríbanla.
- d) ¿Cómo varía el área de un cuadrado si se hace variar la medida del lado?



## Dibujos a escala



Los mapas y planos, utilizan **escala** para dar a conocer las magnitudes. La **escala**, es una proporción entre el dibujo y la realidad, es decir, entre las dimensiones reales y las del dibujo.

Las escalas, se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad.

1: 
$$125 = \frac{1}{125}$$
 antecedente consecuente

En el plano que se muestra, 1 cm del plano equivale a 125 cm de la realidad.

- ¿Cuánto mide en el plano lo que en la realidad mide 2.500 m?
- ¿Cuánto mide en la realidad lo que en el plano mide 5 cm?

Para resolver equivalencias, se aplica proporcionalidad directa:

Realidad (cm)	Plano (cm)
250	1
1.250	5
2.500	10

Buscamos la constante de proporcionalidad, calculando el cuociente entre un par de valores de las variables. Ejemplo: 250 : 1 = 250. Luego debemos completar la tabla manteniendo esta constante entre los cuocientes de los valores.

Complete las equivalencias, de acuerdo a la escala que se indica:

1 : 150		
Plano (cm)	Realidad (cm)	
2		
3		
10		

1 : 500		
Plano (cm)	Realidad (cm)	
4		
6		
20		

3:1	
Plano (cm)	Realidad (cm)
5	
8	
10	

¿Qué indica la escala 3 : 1, una ampliación o una reducción?



## **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 24 puntos

1 Lea y resuelva la siguiente situación: (2 puntos c/u).

En invierno, necesitamos abrigarnos. Para ello, nos ponemos ropa gruesa y si eso no basta, prendemos la estufa. Pero, ¿sabe cuánto nos cuesta el calorcito que nos proporciona la estufa?

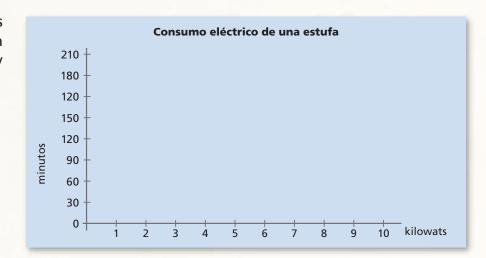
a) Si una estufa eléctrica de 2.000 w gasta 1 kw por cada media hora de funcionamiento, ¿cuántos kw consume en 3 horas de funcionamiento?

b) Complete la tabla.

 Consumo (kw)
 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10

 Tiempo (min)
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1
 1</td

c) En el gráfico, marque los puntos que corresponden al consumo y el tiempo y únalos con una línea.



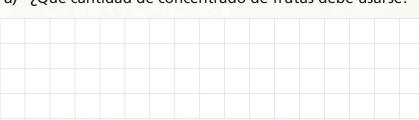
- 2 Responda las siguientes preguntas: (3 puntos).
  - a) ¿Qué relación se establece entre el tiempo de funcionamiento y el consumo eléctrico?
  - b) ¿Qué tipo de proporcionalidad se establece entre estas dos variables?
  - c) Cuáles son las características de esta proporcionalidad?

106

Módulo 2 Razones, porcentajes y proporciones



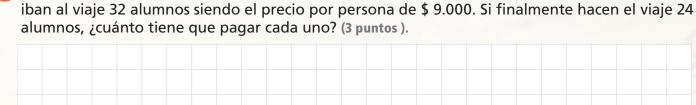
- 3 Dos maestros se demoran 6 horas en pintar la fachada de una casa. ¿Cuánto demorarán 4 maestros? (3 puntos ).
- 4 Un concentrado de frutas para preparar jugo, rinde 10 ml de concentrado por 100 ml de agua, es decir, 10 : 100. Si se quiere preparar 15 l de jugo: (3 puntos).
  - a) ¿Qué cantidad de concentrado de frutas debe usarse?





b) ¿Y para preparar 22  $\ell$ ? (3 puntos ).





6 Para envasar una cantidad de vino se necesitan 8 barriles de 200 litros de capacidad cada uno. Si se quiere envasar la misma cantidad de vino en 32 barriles, ¿cuál deberá ser la capacidad de esos barriles? (3 puntos ).



Unidad 2 Variaciones proporcionales



#### **SÍNTESIS MÓDULO 2**

En el módulo "Razones, Porcentajes y Proporciones", desarrollamos los contenidos correspondientes a conceptos de razón, porcentajes y variaciones proporcionales.

Respecto a las razones, aprendimos que son una forma de comparar por cuociente determinadas magnitudes. Esto, nos permite dimensionar ciertas comparaciones.

En relación a porcentajes, determinamos que es una razón de consecuente 100 y nos indica que "de cada tantos, se consideran 100". Con este conocimiento pudimos resolver una variedad de situaciones de la vida diaria.

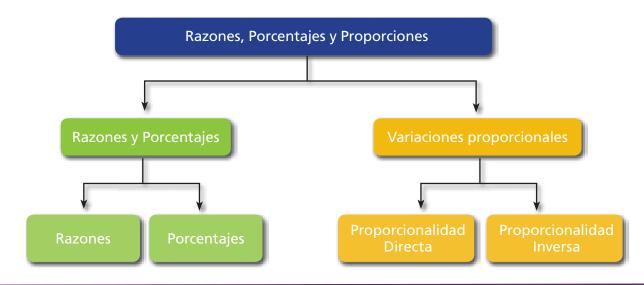
Respecto a variaciones proporcionales, en primer lugar establecimos que hay magnitudes que se relacionan, pero no de una manera proporcional. Dos o más magnitudes se relacionan de manera proporcional cuando se produce un desplazamiento, en igual o distinto sentido, en la misma proporción entre las variables.

Hay variación proporcional directa, cuando el cuociente de las variables es un valor constante y se dan las siguientes condiciones:

- Si una de las variables aumenta en cierta proporción (al doble, al cuádruple, en un factor dado, etc.), la otra variable también aumenta en la misma proporción.
- Si una de las variables disminuye en una cierta proporción (a la mitad, a la tercera parte, en un factor dado, etc.), la otra variable también disminuye en la misma proporción.
- Si se representan los valores en un gráfico, resulta una línea recta que pasa por el origen.

En una variación proporcional inversa se cumple: el producto entre los valores respectivos de las variables, es constante. Si una variable aumenta en un cierto factor, la otra disminuye en el mismo factor. Si se representan estos valores en un gráfico, resulta una curva descendente (rama de hipérbola).

En el siguiente esquema, se sintetiza los contenidos trabajados en el módulo:





# Módulo 3



# Temas de geometría

Unidad Teoremas geométricos

Unidad 2

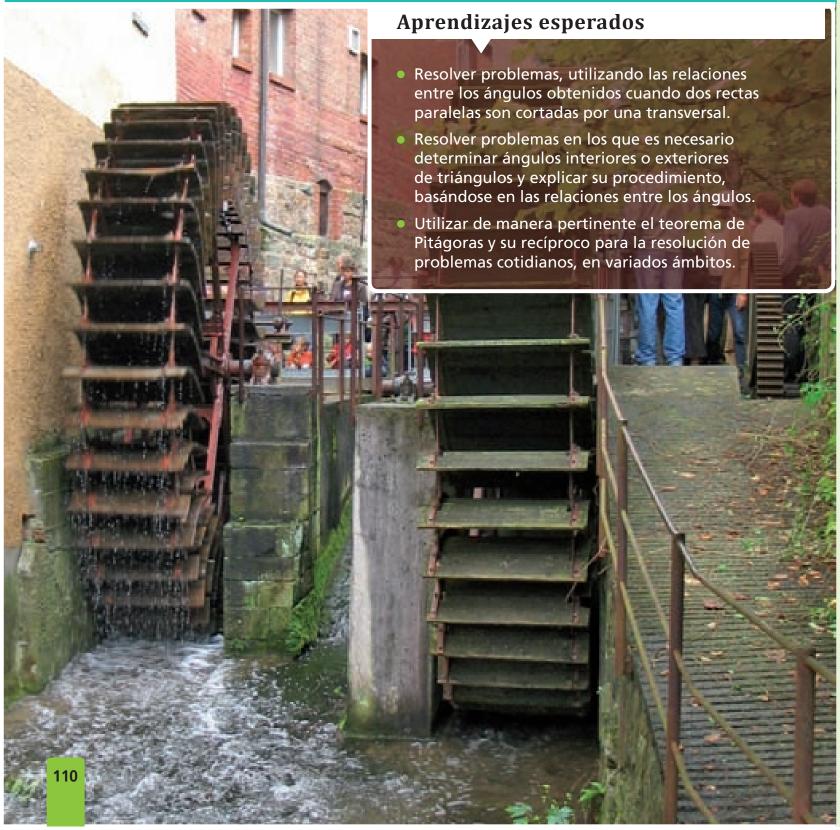
Círculos y cilindros

109



Unidad

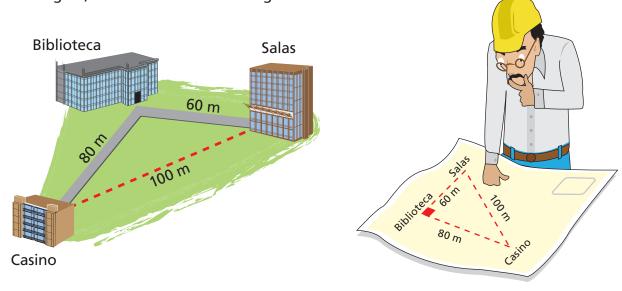
## **Teoremas geométricos**





#### Ángulos en nuestro entorno

Don Carlos, ha sido contratado para pavimentar los caminos peatonales del nuevo campus de la "Universidad San Martín". Los edificios están dispuestos de tal forma que la biblioteca, el casino y el edificio donde están las salas de clases, forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Los caminos con pavimento, son los que unen la biblioteca con las salas y la biblioteca con el casino, pero el pavimento está en muy mal estado.

El camino que une el casino con las salas, es solo un sendero que se ha formado naturalmente por el paso de las personas y que las autoridades han decidido pavimentar, puesto que, en el largo plazo, es más económico que mantener el pasto en buen estado.

Don Carlos, cobra \$18.000 por el metro lineal de pavimento si este no ha sido pavimentado antes y \$12.600 el metro, en caso contrario. En el primer caso, su ganancia es de \$11.000 y en el segundo caso gana \$8.300 por metro lineal.

- ¿Qué distancia hay entre las salas de clases y el casino?
- ¿Cuántos metros pavimentaría don Carlos si le pidieran el trabajo completo?
- ¿Cuánto ganaría si pavimentara solo el sendero que une el casino con las salas?
- ¿Cuánto ganaría si solo re-pavimenta los caminos ya pavimentados y en mal estado?

En esta unidad estudiaremos algunos teoremas importantes de la geometría plana, relacionados con propiedades fundamentales de los triángulos que nos ayudarán a encontrar las soluciones a las preguntas planteadas.

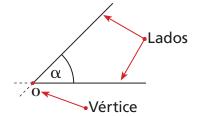
111



#### Algunos conceptos básicos de geometría

#### Medida de ángulos

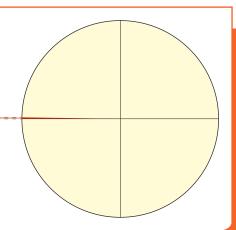
Recordemos que un ángulo, es la porción de plano comprendida entre dos semirrectas que se cortan en un punto denominado vértice, las semirrectas se llaman lados. Los ángulos se miden en grados (°).



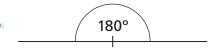
Entenderemos por un grado (°), cada una de las partes que se obtiene cuando un círculo es dividido en 360 partes iguales.

**1**°

Los grados (°), son unidades de medida de la abertura entre dos segmentos que se interceptan, por lo que no dependen del tamaño del círculo.



La circunferencia completa tiene 360 grados (°), entonces la mitad de ella mide 180 grados (°), lo que se conoce como ángulo llano o extendido.



La mitad de un ángulo llano mide la mitad de 180°, esto es, 90° y se denomina **ángulo recto**. Se dibuja como un cuadrado.



#### Suplemento de un ángulo

Suplemento de un ángulo  $\alpha$ , es aquel ángulo que le falta para completar 180°.

Ejemplo:

El suplemento de  $\alpha$  = 75° es 105°, ya que:  $\alpha$  + suplemento de  $\alpha$  = 180°.

Entonces:  $75^{\circ} + 105^{\circ} = 180^{\circ}$ 

• Determine el suplemento de los siguientes ángulos:

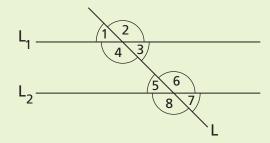
Ángulo	135°	150°	89°	60°
Suplemento del ángulo				



#### Rectas paralelas cortadas por una transversal



Primero, conoceremos algunas propiedades de los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercera recta transversal, como se muestra en la figura. Para este problema encontraremos interesantes propiedades:



1 Con un transportador, midan los 8 ángulos que se forman en los dos puntos en que la recta L corta a las rectas paralelas L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub>. Registren las medidas en una tabla.

¿Qué pueden observar acerca de los valores de los ángulos?

2 Repitan esta actividad con dos paralelas cortadas por una transversal en un ángulo distinto del anterior.

¿Se obtienen los mismos resultados que en el caso anterior?

- Repitan el trabajo, pero ahora con rectas no paralelas cortadas por una transversal.
  - a) ¿Se observan los mismos resultados que en el caso anterior?
  - b) ¿Podríamos concluir alguna propiedad sobre este grupo de ángulos?

Unidad 1 Teoremas geométricos



113

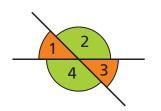






Repasemos el esquema de la actividad grupal anterior, en la que se concluye que dos ángulos son opuestos por el vértice si los lados de uno son la prolongación del otro y comparten el mismo vértice.

Dos ángulos se dicen opuestos por el vértice, si tienen los mismos segmentos de recta por lados y el mismo vértice, pero se ubican en lados opuestos.



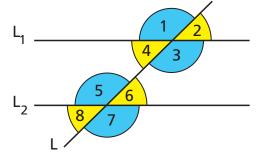
Analice la siguiente afirmación y explique por qué es cierta (pensar en el suplemento del ángulo puede ayudarlo): "Todo par de ángulos que sean opuestos por el vértice, son congruentes (misma medida)".

Entonces, para los ángulos de la figura anterior se cumple que:

$$\angle 1 = \angle 3$$
 y  $\angle 2 = \angle 4$ 

Consideremos dos rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ , cortadas por una recta transversal L, como se muestra en la figura .

Los ángulos 1 y 3 son opuestos por el vértice y también lo son los ángulos 2 y 4.



Con la ayuda de un transportador, medimos los 8 ángulos que se forman en las dos intersecciones. Sus valores, los hemos puesto en la siguiente tabla:

Ángulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Medida e grados	135,5°	44,5°	135,5°	44,5°	135,5°	44,5°	135,5°	44,5°

Los ángulos pintados del mismo color, son congruentes porque son opuestos por el vértice.

De acuerdo a los resultados que hemos obtenido en la medición anterior, podemos clasificar los ocho ángulos en dos grupos:

**Grupo 1**: tomamos los ángulos 1, 3, 5, y 7, que miden 135,5° cada uno.

Grupo 2: están los ángulos 2, 4, 6, y 8, que también miden todos lo mismo, en este caso 44,5°.

Note que los ángulos del primer grupo, son suplementarios con los del segundo grupo y recíprocamente.

Esta igualdad de ángulos, se produce debido a que las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas ( $L_1//L_2$ ) y la propiedad se mantiene, sin importar el ángulo en que la transversal L las intercepte.

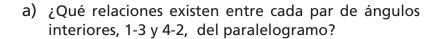
Si una recta transversal L corta a dos rectas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ , entonces:

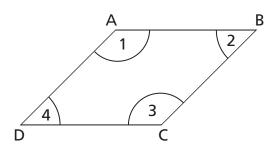
$$\cancel{4}1 = \cancel{4}3 = \cancel{4}5 = \cancel{4}7$$
 y  $\cancel{4}2 = \cancel{4}4 = \cancel{4}6 = \cancel{4}8$ 



Consideremos el paralelogramo ABCD, de la figura:

Teniendo en cuenta que AB//DC y AD//BC, responda:

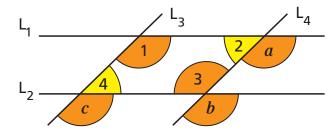




b) ¿Qué relación existe entre los ángulos 1 y 2?

¿Cuánto vale la suma de los 4 ángulos interiores de un paralelogramo?

Para responder esta pregunta, consideramos las rectas paralelas que contienen a los 4 lados del paralelogramo y analizamos sus ángulos, de acuerdo a las propiedades recién estudiadas:



• Como  $L_3$  //  $L_a$  y ambas están cortadas por la transversal  $L_1$ , 1 y 2 a, son congruentes.

• Como  $L_1$  //  $L_2$  y las corta la transversal  $L_4$ ,  $\not \Delta a$  y  $\not \Delta b$ , son congruentes.

• Como el  $\m 3$  es opuesto por el vértice al  $\m b$ , estos también son congruentes y por lo tanto  $\m 3$  =  $\m 1$ .

• Como  $\m 2$  es el suplemento de  $\m 4$ ,  $\m 2$  es el suplemento de  $\m 4$  y  $\m 1$  =  $\m 4$  entonces,  $\m 2$  =  $\m 4$ .

Los paralelogramos son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos.

Además, todos los paralelogramos tienen las siguientes propiedades:

• Los lados opuestos tienen la misma longitud.

Los ángulos interiores opuestos son congruentes (misma medida).

• Las diagonales se cortan en su punto medio.

Por otra parte, como  $\cancel{\bot}1 = \cancel{\bot}a$  y  $\cancel{\bot}a$  es el suplemento de  $\cancel{\bot}2$ , entonces  $\cancel{\bot}1$  es el suplemento de  $\cancel{\bot}2$  y también del  $\cancel{\bot}4$ .

Unidad 1 Teoremas geométricos



#### Ángulos consecutivos

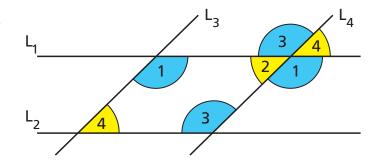
Se llaman **ángulos consecutivos** en un polígono, a todo par de ángulos cuyos vértices son los extremos de uno de los lados del polígono.

Por ejemplo, en el paralelogramo de la página 115,  $\cancel{\cancel{4}}$ 1 y  $\cancel{\cancel{4}}$ 2, son consecutivos; también lo son  $\cancel{\cancel{4}}$ 2 y  $\cancel{\cancel{4}}$ 3.

La suma de ángulos consecutivos en un paralelogramo, es un **ángulo llano o extendido**. Es decir, se cumple:

$$\cancel{1} + \cancel{1} = 180^{\circ} \text{ y } \cancel{1} + \cancel{1} = 180^{\circ}$$

Finalmente, podemos verificar de manera muy simple que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es igual a 360°, es decir, dos ángulos llanos, como se ve en la figura.



Se puede comprobar, aplicando que la suma de dos ángulos consecutivos es igual a 180°.

Así, por ejemplo:  $\cancel{1} + \cancel{1} = 180^{\circ}$  y  $\cancel{1} + \cancel{1} = 180^{\circ}$ 

Luego:  $\cancel{1} + \cancel{1} = \cancel{1} =$ 

La suma de los cuatro ángulos interiores del paralelogramo, es igual a 360°.

#### Complemento de un ángulo $\alpha$

Se llama **complemento de un ángulo \alpha**, al ángulo que le falta para medir 90°. Por ejemplo, el complemento de 50° es 40°, porque: 50 + 40 = 90.

1 Complete la siguiente tabla:

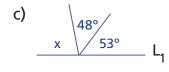
Ángulo (en grados)	80	50		
Complemento del ángulo (en grados)			65	22

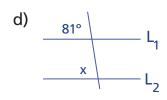


- **2** ¿Qué quiere decir que dos ángulos,  $\alpha$  y  $\beta$ , son complementarios?
- ¿Cuál es el complemento de un ángulo que mide 45°? y ¿cuál es su suplemento?
- 4 Si el ángulo es nulo, ¿cuál es su suplemento? ¿Y su complemento?
- $oldsymbol{5}$  ¿Cuánto mide el ángulo lpha si es congruente con su suplemento?
- $\bigcirc$  Calcule la medida del ángulo que falta (suponer que  $L_1 // L_2$ )

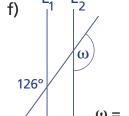
a) 
$$\frac{100^{\circ}}{\alpha}$$
 L<sub>1</sub>

b) /56° L





e) / L<sub>1</sub>



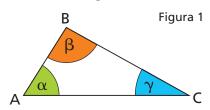
#### Ángulos interiores de un triángulo

A continuación, veremos una segunda aplicación de la propiedad anterior para determinar el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

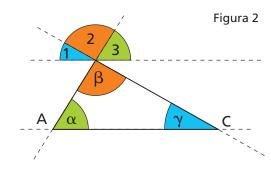
#### Actividad grupal

- 1 Construyan distintos triángulos y, con la ayuda de un transportador, midan los tres ángulos interiores. Registren los datos en una tabla y, en la misma tabla, escriban la suma de los tres ángulos.
- 2 Discutan sobre la particularidad de obtener siempre 180° para la suma de sus ángulos interiores.

Consideremos el triángulo ABC de la figura 1.



Dibujamos la recta que contiene al lado AC y por el vértice B trazamos una recta paralela a AC. Si prolongamos los segmentos AB y BC, se producen los ángulos que se muestran en la figura 2.



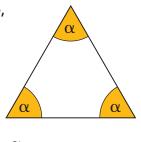
- Los ángulos  $\alpha$  y 43 son congruentes y también lo son  $\gamma$  y 41.
- Los ángulos  $\beta$  y  $\angle 2$  son opuestos por el vértice, por lo tanto miden lo mismo. Como la suma de  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ , entonces:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

En este análisis, hemos considerado un triángulo cualquiera, por lo tanto, hemos demostrado que: la suma de los ángulos interiores de todo triángulo, es igual a 180°.

Realice los siguientes ejercicios:

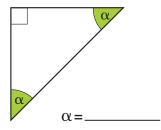
1 Determine cuánto mide un ángulo cualquiera de un triángulo equilátero, sabiendo que los tres ángulos son congruentes.





2 Determine cuánto miden los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.







3 Discuta con dos compañeros o compañeras, por qué la siguiente afirmación es verdadera: "Todo triángulo tiene, a lo menos, dos ángulos interiores agudos".

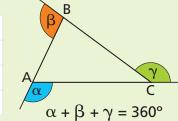
Construir una demostración bien argumentada.



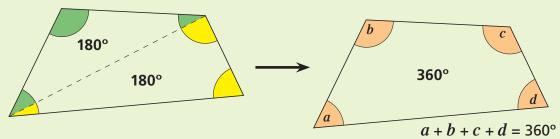
# Actividad grupal

1 Consideren distintos triángulos y calculen la medida de los tres ángulos exteriores y su suma. Registren los datos en una tabla.

Discutan sobre la particularidad de que su suma sea igual a 360°, independiente del tipo de triángulo que se elija.



2 Aplicando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, demuestren que, en todo cuadrilátero, la suma de los ángulos interiores es igual a 360°.



Indicación: dividan el cuadrilátero en dos triángulos.



En el siguiente sitio web, encontrará un buen repaso acerca de Triángulos. http://personal5.iddeo.es/ztt/For/F7\_Triangulos.htm

**Unidad 1** Teoremas geométricos



#### Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo

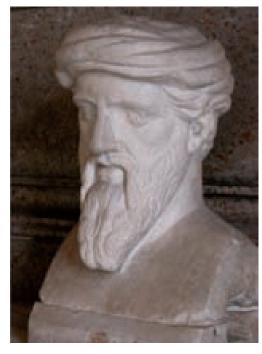
Pitágoras (582-500 a.C.), es quizá uno de los matemáticos más famosos en la historia y uno de los más grandes geómetras de la antigüedad. Fue filósofo y matemático griego, fundador de una secta con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocida como "el pitagorismo", sus miembros se llamaban "los pitagóricos".

Ellos, realizaron investigaciones en diversas áreas de la matemática, cultivaron el concepto de número, logrando importantes avances. A través de estos estudios, establecieron una base científica para las matemáticas.

En geometría, el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como Teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Por muchos años, se le atribuyó a Pitágoras el enunciado y demostración de este teorema. Sin embargo, existen evidencias de que en otras culturas, lo conocían con anterioridad a Pitágoras.

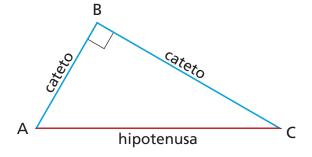
Por ejemplo, los hindúes en el siglo VII a.C. y los babilonios 2.000 a.C., lo habían utilizado. Sin embargo, no se conocen demostraciones anteriores, ni estudios sistematizados del problema, ya que la geometría no era para ellos una teoría formal, sino un cierto tipo de aritmética aplicada.



▲ Pitágoras Museo capitolino de Roma

**Fuente:** adaptación desde el sitio web, http://maralboran.org/wikipedia/index.php/ Pit%C3%A1goras\_de\_Samos

Consideremos un triángulo rectángulo ABC. El lado más largo, se llama hipotenusa y los otros dos lados, se llaman catetos.

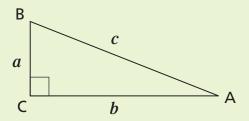


Note que, la hipotenusa es el lado del triángulo opuesto al ángulo recto y los catetos son los lados del ángulo recto. Frecuentemente, se usa la letra c para indicar la medida de la hipotenusa y las letras a y b para la longitud de los catetos.



# Actividad grupal

 Junto a tres o cuatro personas, dibujen 3 diferentes triángulos rectángulos y a cada uno de ellos, mídanle los catetos y la hipotenusa, verificando que este es el lado más largo.



Con la ayuda de una calculadora, determinen el cuadrado de cada cateto y de la hipotenusa de cada triángulo y registren los resultados en la siguiente tabla (a, b y c representan las longitudes de los catetos y la hipotenusa)

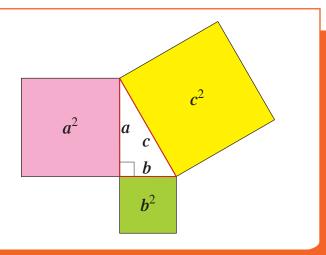
Triángulo	<i>a</i> (cm)	$m{b}$ (cm)	$oldsymbol{c}$ (cm)	$a^2$ (cm <sup>2</sup> )	$b^2$ (cm $^2$ )	$c^2$ (cm $^2$ )	$a^2 + b^2 \text{ (cm}^2\text{)}$
1							
2							
3							

Verifiquen que en todos los casos, se cumple que  $a^2 + b^2$  es igual a  $c^2$ . Si su resultado es aproximado, es atribuible al error en la medición.

El teorema de Pitágoras, asegura que estas dos cifras son siempre iguales.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

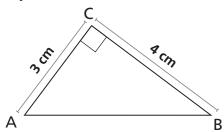
Gráficamente, esto quiere decir que la suma de las áreas de los cuadrados rosado y verde es igual al área del cuadrado amarillo.







En el siguiente ejemplo, vamos a determinar el valor de la hipotenusa para un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.

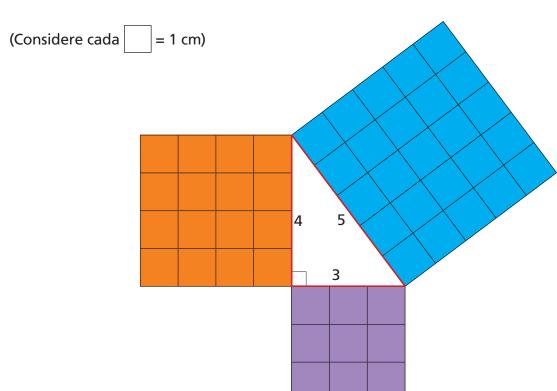


Para este triángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es:

$$4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
, que es:  $25 = 5^2$ 

Entonces, la hipotenusa de este triángulo mide 5 cm.

En la siguiente figura, se aprecia claramente la validez del teorema para este triángulo:



(a)

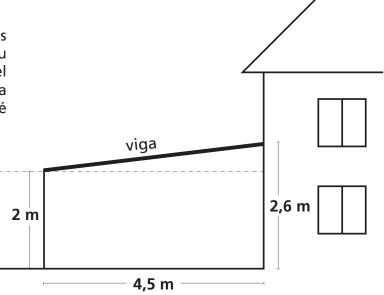
Para comprobar este teorema en un triángulo rectángulo, le recomendamos visitar el siguiente enlace, donde encontrará el "rompecabezas de Perigal" interactivo.

 $http://personal.telefonica.terra.es/web/imarti22/actividades/actividades/pitagoras/marco\_pitagoras3.htm\\$ 

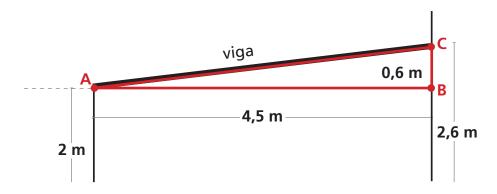


#### Aplicación del teorema de Pitágoras

Camilo, necesita calcular la longitud de unas vigas que debe comprar para el techo de su terraza. Sabiendo que la parte más baja del techo mide 2 m de alto; la parte más alta mide 2,6 m y el ancho es de 4,5 m, ¿de qué longitud debe comprar las vigas?



Si miramos el techo horizontalmente, podemos imaginar el triángulo rectángulo ABC que se forma con la viga como su hipotenusa, según se muestra en la figura.



Para calcular el largo de la viga, aplicamos el teorema de Pitágoras, que nos permite calcular la longitud de la hipotenusa.

Sabemos que los catetos miden 0,6 m y 4,5 m.

La suma de los cuadrados es:

$$0.6^2 + 4.5^2 = 0.36 + 20.25 = 20.61$$

Este, es el valor de la longitud del cuadrado de la hipotenusa. Para encontrar la medida de la hipotenusa, con la ayuda de una calculadora, debemos ingresar este número y calcularle su **raíz cuadrada** (su símbolo es " $\sqrt{}$ ", y es un número que al multiplicarse por sí mismo da 20,61). En este caso, la raíz cuadrada de 20,61 es aproximadamente 4,55m, que corresponde al largo de la viga.



123

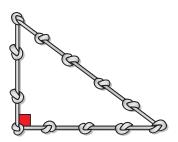
#### Teorema de Pitágoras recíproco

En el antiguo Egipto, cada año el río Nilo se desbordaba e inundaba las tierras y predios arrasando con los límites de las propiedades vecinas. Como resultado, los egipcios tenían que medir sus tierras todos los años con el fin de calcular los impuestos que debían pagar. Como la mayoría de los terrenos eran rectangulares, necesitaban una manera fiable de marcar ángulos rectos, para esto hacían lo siguiente:



En una cuerda, marcaban con nudos 12 segmentos de igual longitud y luego, unían sus extremos de manera de formar un lazo cerrado, como se muestra en la figura superior.

Con este lazo, se puede formar un triángulo rectángulo, cuyos lados son 3, 4 y 5 veces la longitud de cada segmento. Esta cuerda, era un instrumento que se usaba para dibujar ángulos rectos (figura inferior).



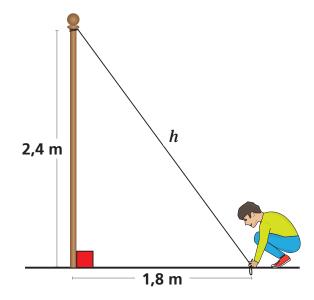
Este método para medir ángulos rectos, funciona debido a que el teorema de Pitágoras tiene un teorema recíproco. Este dice que: "si en un triángulo, la suma de los cuadrados de los lados más cortos es igual al cuadrado del lado mayor, entonces, ese triángulo es rectángulo".

#### Por ejemplo:

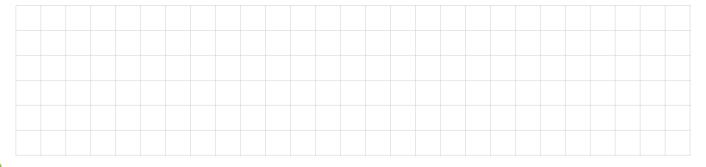
Ignacio está instalando un asta de bandera en su patio. Para asegurarse que quede perpendicular al suelo, usará el teorema de Pitágoras recíproco.

Esto, lo hará atando a la punta del asta un cordel que tensará desde el suelo.

Si la longitud del asta es de 2,4 m y la sombra que proyecta en el suelo es de 1,8 m:



• ¿Qué longitud debe tener el cordel para que se forme un ángulo recto entre el asta y el suelo?



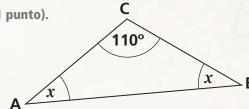


#### **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 23 puntos

De acuerdo a lo estudiado en esta unidad, responda:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo mide \_\_\_\_\_ grados. (1 punto).
- En un triángulo isósceles, el ángulo desigual mide 110°. (1 punto). Los otros dos ángulos miden grados cada uno.



Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), en caso de ser falsas, justifique. (8 puntos).

Afirmación	V	F	Justificación
Existen triángulos equiláteros rectángulos.			
Existen triángulos isósceles rectángulo.			
Existen triángulos escalenos acutángulos.			
Existen triángulos isósceles acutángulos.			
En un triángulo rectángulo:			
a) Dos catetos son siempre iguales.			
<b>b)</b> La hipotenusa es igual a la suma de los catetos.			
c) El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.			
d) Los tres lados son iguales.			

Dibuje un triángulo con lados de longitud 3,5 cm, 12 cm y 12,5 cm. (3 puntos).



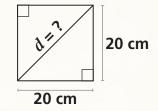
- a) Verifique que este triángulo tiene un ángulo recto.
- b) Compruebe que el Teorema de Pitágoras es válido para este triángulo.

125

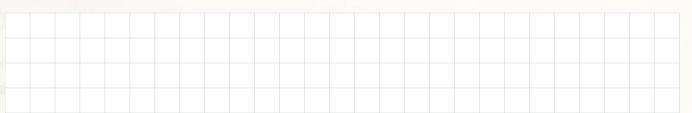


Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado con lados de longitud igual a 20 cm. (2 puntos).

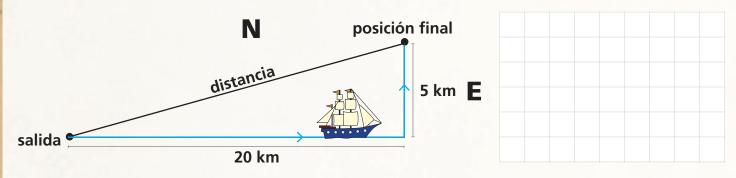




6 Con la ayuda de una calculadora, determine una aproximación del perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm cada uno. (2 puntos).



Un barco, navega hacia el Este durante 20 km y luego al Norte por 5 km. ¿A qué distancia, en kilómetros, está la embarcación desde su posición inicial? (3 puntos).



Una cuerda de una longitud de 10 m, está atada a la parte superior de un mástil. La altura del asta de la bandera es de 8 m. ¿A qué distancia de la base del asta quedará el extremo del cordel, si se tensa desde el suelo? (3 puntos).



126

Módulo 3 Temas de geometría



Unidad 2

# Círculos y cilindros





#### Las Proporciones del Hombre de Vitruvio

El Hombre de Vitruvio es, probablemente, una de las imágenes más famosas y reconocibles de Leonardo Da Vinci. Carteles con la imagen del hombre con dos pares de brazos extendidos y dos pares de piernas también extendidas, han adornado muchas paredes durante al menos un par de generaciones.

Este dibujo se ha convertido en un auténtico símbolo, ya que recoge varias de las ideas claves del pensamiento renacentista: el hombre, medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción.

El ombligo, es el punto central natural del cuerpo humano, ya que si un hombre se echa sobre la espalda, con las manos y los pies extendidos y coloca la punta de un compás en su ombligo, los dedos de las manos y de los pies, tocarán la circunferencia del círculo que así trazamos. Y, de la misma forma que el cuerpo humano nos da un círculo que lo rodea, también podemos hallar un cuadrado donde igualmente esté encerrado

el cuerpo humano. Porque, si medimos la distancia desde las plantas de los pies hasta la punta de la cabeza y luego aplicamos esta misma medida a los brazos extendidos, encontraremos que la anchura es igual a la longitud, como en el caso de superficies planas que son perfectamente cuadradas.

**Fuente:** www.portalplanetasedna.com.ar/divina\_proporcion.htm http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/leonardovi.htm

En esta unidad aprenderemos nuevas propiedades geométricas del círculo, y de los cilindros. Estudiaremos la relación entre el perímetro de un círculo y su diámetro, conoceremos al número "pi"  $(\pi)$ , y su relación con la circunferencia.

Aprenderemos, también, a calcular la longitud y el área de un círculo, y desde este punto, calcularemos el volumen de un cilindro.

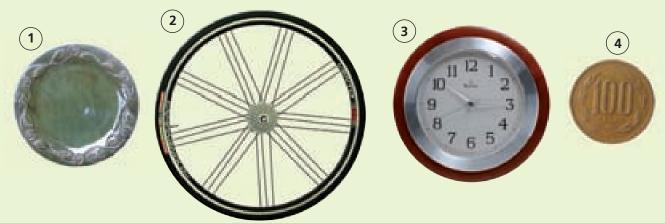




#### Perímetro de la circunferencia



Con un trozo de hilo, lana o cuerda y una regla, midan el perímetro y el diámetro de los círculos que se muestran a continuación y completen la tabla:



Círculo	Diámetro (cm)	Perímetro (cm)	Perímetro diámetro
1			
2			
3			
4			

- ¿Qué número se obtiene del cuociente <u>perímetro</u>, en cada caso?
- 2 Discutan en su grupo la siguiente pregunta y compartan su respuesta con el curso: El perímetro del círculo, ¿aumenta o disminuye conforme lo hace el diámetro?

El número Pi ( $\pi$ ) en la geometría elemental interviene en todas las cuestiones relativas a medidas de círculos, esferas, conos y figuras redondas, en general.

Este número ha aparecido en los estudios del hombre desde la antigüedad.

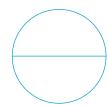
"Pi", tiene infinitas cifras decimales y no se puede expresar como una fracción, por lo que es llamado un "número irracional".

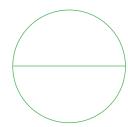


Al observar los círculos de la figura:









Note que a medida que el diámetro aumenta, la longitud de su circunferencia también lo hace y, recíprocamente, mientras mayor es la circunferencia más largo es su diámetro.

Es decir, a mayor diámetro mayor perímetro.

Esto quiere decir, que las longitudes son directamente proporcionales.

El cuociente entre ellas, es un número fijo o constante, llamado pi, se simboliza con la letra griega  $\pi$  y su valor aproximado con dos decimales es 3,14.

Es decir:  $\pi = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}}$ 

Como  $\pi$  representa el número de veces que cabe el diámetro del círculo en su circunferencia, entonces  $\pi$  veces el diámetro, es el perímetro.

Entonces, diremos que el perímetro de la circunferencia corresponde a:

perímetro de la circunferencia =  $\pi$  x medida del diámetro.

Como la medida del diámetro es el doble de la del radio, podemos escribir la longitud de la circunferencia como:

perímetro de la circunferencia =  $\pi$  x 2 x medida del radio.

Si denotamos por C el perímetro de la circunferencia, r su radio y d el diámetro, podemos escribirlo como:  $C = 2\pi r$  o  $C = \pi d$ 



 $\boldsymbol{C}$ 

Circunferencia es la línea curva cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia (radio) de un punto (centro).

Círculo es la superficie plana limitada por una circunferencia.



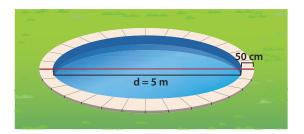
En el siguiente enlace, usted encontrará un repaso muy claro y sencillo acerca de los temas de geometría abordados en este curso. Haga click en *avanzar* y recorra todos los contenidos.

http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/matematicas/academicos/emartinez/extension/perimetro/perimetro.html



#### **Ejemplo:**

Paulina, necesita cercar la piscina de su casa porque tiene una niña pequeña que ya aprendió a caminar. La piscina, tiene forma de círculo, con un diámetro de 5 m y a su alrededor tiene un borde de cerámicas de 50 cm de ancho.



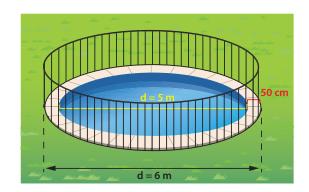
Si el metro lineal de reja instalado cuesta \$45.000, ¿cuánto deberá pagar, aproximadamente, por la reja completa?

Puesto que la piscina y su borde forman un círculo cuyo diámetro es igual a 6 m, entonces su perímetro es:

Perímetro = 
$$\pi$$
 x 6 = 3,14 x 6 = 18,84 m

La longitud de la circunferencia, es igual a 18,84 m, lo que puede aproximarse a 19 m, considerando que se trata de una reja.

Si por cada metro le cobran \$45.000, entonces, por la reja completa instalada pagará:



Resuelva los siguientes problemas, aplicando lo aprendido. Puede usar calculadora:

1 Claudia, sale a andar en bicicleta cada día y para calcular los kilómetros que recorre le ha puesto un contador de vueltas a la rueda trasera de su bici. Si el diámetro de la rueda es de 63 cm:



1 vuelta =  $d \times \pi$ 

a) ¿Cuántos metros avanza en cada vuelta completa?



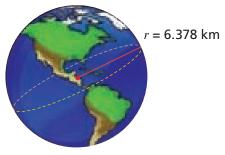
b) ¿Cuántos kilómetros recorrió si la rueda dio 151 vueltas?





- 2 La forma de la Tierra es, aproximadamente, la de una esfera. Si el radio de la Tierra mide 6.378 km, determine:
- a) ¿Cuántos kilómetros mide la línea del Ecuador, aproximadamente?





b) Si con una cuerda hacemos un cinturón para el mundo, pasando por la línea del Ecuador, ¿en cuánto aumentaría la longitud de la cuerda si el radio de la Tierra creciera 100 metros?



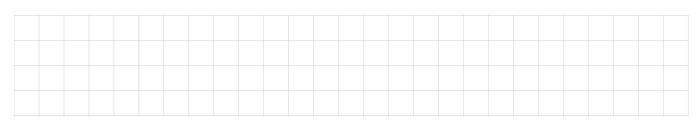
3 Daniel y Camilo están haciendo una competencia, que consiste en poner a rodar dos monedas del mismo tamaño sobre el suelo de baldosas. Ambas monedas tienen 3 cm de radio. La moneda que recorra más centímetros, es la ganadora.



a) Si la moneda de Daniel dio 20 vueltas, ¿cuántos centímetros recorrió?



b) ¿Cuántas vueltas dio la moneda de Camilo, si recorrió 120 cm?







#### Área del círculo

Observe las figuras 1 y 2. En cada caso el cuociente entre el área del círculo y el cuadrado del radio es, aproximadamente, 3,14.

Este cuociente, se puede interpretar como el número de veces que "cabe" el cuadrado (cuyo lado es igual al radio del círculo), en el círculo mismo.

En ambas figuras, se puede visualizar cómo las partes de color rosado y verde tienen la misma área. La parte azul, tiene una superficie un poco más grande que la del cuadrado rosado, ya que el cuadrado cabe, aproximadamente, 3,14 veces en el círculo.

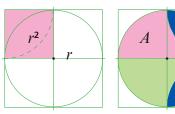


Figura 1

Figura 2

Hemos probado, experimentalmente, que: área del círculo =  $(3,14) \times (radio)^2$ 

Si A es el área del círculo y r el radio, podemos escribirlo como:  $A = \pi \times r^2$ 

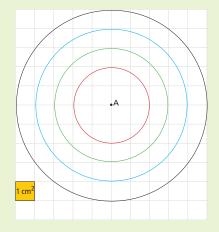
Cuidado: en el cálculo del área del círculo, el número que se multiplica por sí mismo es el radio, que no es igual multiplicar por sí mismo  $\pi$ , por el radio.



## Actividad grupal

En la siguiente hoja de papel cuadriculado, vamos a suponer que cada cuadrito mide 1 cm de lado.

- Observen que el área de cada cuadradito mide 1 cm<sup>2</sup>.
- Hagan un cálculo aproximado del área de cada círculo y regístrenlos en la tabla.
- Con la ayuda de una calculadora, calculen el cuadrado de cada radio y dividan las longitudes, como se indica en la tabla.

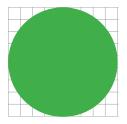


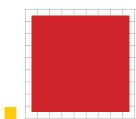
Área círculo (cm²)	Radio (cm)	$r^2$ (cm $^2$ ) (área cuadrado de lado $r$ )	(Área círculo) : $r^2$
	5	25 cm <sup>2</sup>	
	4		

Con los resultados de la tabla anterior, respondan las preguntas que vienen a continuación. Luego, discutan las respuestas con sus compañeros y compañeras.

- 1) ¿Obtuvieron el mismo resultado en cada división?
- 2 Estos valores, ¿se parecen a algún número que conozcan?
- 3 ¿Cuántas veces "cabe", entonces, el cuadrado del radio en su círculo?
- 4 ¿Podrían calcular el área de un círculo teniendo solo el valor del radio? ¿Cómo lo harían?

En un documento egipcio de más de 3.500 años de antigüedad, se afirma que "un círculo cuyo diámetro mide 9 unidades, tiene la misma área que un cuadrado cuyo lado mide 8 unidades".





Determinemos la validez de esta afirmación.

Lo haremos calculando y comparando el área de ambas figuras.

El diámetro del círculo, mide 9 unidades. Si elegimos como unidad de longitud el centímetro, tomaremos un círculo cuyo radio mide 4,5 cm. Entonces, su área mide:

$$A = (3,14) \times (4,5)^2 = 3,14 \times 20,25 = 63,59 \text{ cm}^2$$

El lado del cuadrado, mide 8 cm, por lo tanto, su área mide 64 cm<sup>2</sup>.

La diferencia de áreas es de 0,41 cm<sup>2</sup>, lo que equivale al área de un cuadrado de 0,64 cm de lado.

En la figura, la diferencia de áreas está representada por el cuadradito amarillo. Note que corresponde a una pequeñísima parte del área del cuadrado grande.

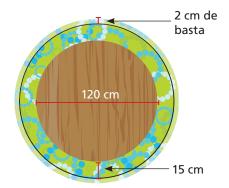
Podemos decir que, las medidas de las áreas de estas figuras son bastante similares, pero no iguales, como se creía.



Resuelva los siguientes ejercicios:

1 Rosana, está confeccionando y vendiendo manteles para mesas redondas que tienen 120 cm de diámetro. El mantel, debe exceder al tamaño de la mesa en 15 cm, además, es necesario dejar un borde de 2 cm en su contorno para hacerle basta.





a) ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitan para confeccionar 25 manteles?



b) ¿Cuántos rollos de tela se deben comprar para confeccionar los 25 manteles, si cada rollo de tela tiene 40 m de largo por 1,6 m de ancho?



2 Jaime, debe ponerle barniz a una mesa que le han pedido restaurar. La superficie de la mesa, está formada por una parte central cuadrada de 1 m de lado y dos semicírculos adosados en dos lados opuestos, como se muestra en la figura.

Para hacer la reparación, Jaime debe barnizar, esperar 8 horas hasta que se seque, luego, lijar suavemente para alisar la superficie y volver a barnizar. Este proceso debe repetirlo, por lo menos, tres veces.



a) ¿Cuántos metros cuadrados barnizará si le pone tres manos de barniz?



b) Si el tarro de barniz rinde 50 m<sup>2</sup>, ¿cuántas mesas puede barnizar si le pone 3 manos de barniz a cada una?



lacktriangle

3 Ester, está confeccionando faldas para vender. Para cortarlas, hace un sencillo molde dibujando dos círculos con el mismo centro y luego la divide en dos partes iguales. A cada mitad le cose los costados, de manera tal que, por cada círculo, hace dos faldas.



La mitad de la circunferencia pequeña será la cintura de una falda y la circunferencia grande marca el largo de la falda.

El perímetro de la circunferencia menor corresponderá al ancho de la cadera de la talla que se está haciendo, S, M o L. Todas las faldas se hacen de 65 cm de largo. De acuerdo a los datos de la siguiente tabla, conversen con el curso los datos que allí aparecen para responder las preguntas que siguen a continuación:

Contorno cadera (cm)	86-91	92-99	100-110	111-130
Talla	S	M	L	XL

a) ¿Cuánto debe medir el diámetro del círculo pequeño y el del círculo grande, para cada talla?



b) ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para confeccionar 12 faldas talla M, 10 talla S y 8 talla L?





#### Volumen del cilindro

Recordaremos que el volumen de un prisma recto (caja de zapatos), se puede calcular como el **producto del área de la base, por la altura.** 

Para calcular el volumen de un cilindro cualquiera, de radio r y altura h, lo haremos usando la misma regla: su volumen es igual al área de la base por la altura.

Como la base del cilindro es un círculo, el área de la base (A), la podemos calcular como:

$$A = \pi \times r^2$$

Si 
$$V$$
 es el volumen del cilindro, entonces:  $V = \pi \times r^2 \times h$   
Área de la base

Al calcular el volumen, si las dimensiones están dadas por centímetros, el volumen se expresa en centímetros cúbicos (cm³). Si las dimensiones están dadas en metros, el volumen se expresa en metros cúbicos (m³).

#### **Ejemplo:**

Claudia, ha pintado los dormitorios de sus hijos. Para hacer este trabajo, compró un galón de pintura celeste agua para el varón y un galón de amarillo para la pieza de la niña.

Al terminar el trabajo, le sobró pintura de ambos colores y quiere guardar los restos en dos frascos herméticos. Ambos tienen 2 litros de capacidad. Recordemos que 1 litro = 1.000 cm<sup>3</sup>.

- ¿Cuál es la capacidad aproximada de un galón, si el tarro tiene 15 cm de diámetro en la base y 21 cm de altura?
- ¿Cuántos cm³ de pintura le quedan de cada color, si la altura que alcanza la pintura celeste en el tarro son 8 cm y la amarilla 12 cm?
- ¿Podrá guardar los restos de pintura en los frascos de 2 litros?



137

Para responder estas interrogantes, analizaremos el problema, paso a paso:

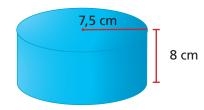
• Como el radio de cada tarro es de 7,5 cm y la altura 21 cm, el volumen de un galón es:

$$V = 3.14 \text{ x } (7.5)^2 \text{ x } 21 = 176.6 \text{ x } 21 = 3.709.13 \text{ cm}^3 = 3.71\ell$$

Es decir, es aproximadamente 3,7 litros.

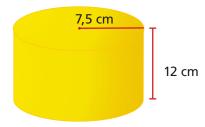
De pintura celeste, sobró un volumen equivalente a un cilindro con igual área de la base, pero altura de 8 cm, por lo tanto le sobró:

Volumen de pintura celeste =  $176,6 \times 8 = 1.412,8 \text{ cm}^3$ 



De pintura amarilla, sobró un volumen equivalente a un cilindro con la misma base, pero altura de 12 cm, entonces:

Volumen de pintura amarilla =  $176,6 \times 12 = 2.119,2 \text{ cm}^3$ 



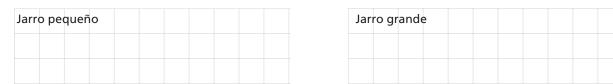
Entonces, solo la pintura celeste podrá guardarse en el recipiente más pequeño, porque la amarilla no cabe en el frasco de 2 litros.

Leonardo va a pintar la pieza de su hija con algunos sobrantes de pintura que tiene guardados. Tiene 1 litro de pintura blanca, 2 litros de pintura roja y medio litro de pintura azul. Para mezclar los tres colores, usará un tarro vacío cuyo diámetro es de 20 cm y la altura es de 30 cm. ¿Podrá Leonardo contener los tres colores dentro de ese recipiente y hacer ahí la mezcla o necesita uno con mayor volumen?





- 2 Rodolfo, tiene un bar y ha notado que la bebida de mayor consumo durante el verano, es la cerveza. Él vende, en promedio, 72 jarros de cerveza cada hora, 50 jarros grandes y el resto, jarros pequeños. El jarro grande tiene un diámetro de 10 cm y 18 cm de alto; el jarro pequeño tiene 8 cm de diámetro y 16 cm de altura. Determine:
  - a) ¿Cuántos litros de cerveza bebe alguien que se toma un jarro pequeño lleno? y ¿uno grande lleno?



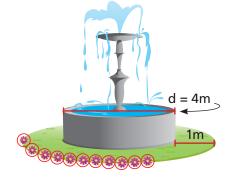
b) ¿Cuántos litros de cerveza vende Rodolfo, en promedio, por cada hora?



3 En medio de la plaza, hay una zona de 1 m de ancho, sembrada de césped alrededor de una fuente de 2 m de radio, como muestra la imagen.

A don Mario, le han solicitado sus servicios de mantenimiento y ornato de la zona sembrada. Debe plantar un camino de petunias en su borde exterior y en el resto, sembrar trébol.

Si cada planta necesita un espacio equivalente a un círculo de diámetro igual a 15 cm, aproximadamente, estime:



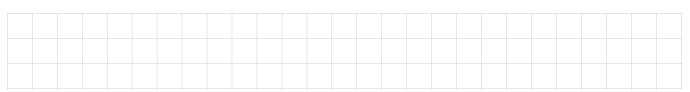
a) ¿Cuántos metros de longitud tiene este camino de flores?



b) ¿Cuántas plantas tendrá que plantar don Mario?



c) ¿Cuántos metros cuadrados de trébol tendrá que sembrar don Mario?





### **EVALUACIÓN**

#### Puntaje total Evaluación 24 puntos

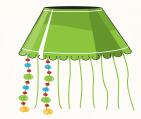
Con la ayuda de una calculadora, complete los datos que faltan en la tabla, considerando  $\pi$  = 3,14: (6 puntos).

Área del círculo (cm²)	Perímetro del círculo (cm)	Radio (cm)	Diámetro (cm)
		4	
			12
	56,52		

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), si son falsas, explique la razón. (1 punto c/u).

Afirmación	V	F	Justificación
Puse ruedas más pequeñas a mi bici, para que corra más rápido.			
$\pi$ , es el número de veces que cabe el diámetro del círculo en su circunferencia.			
$\pi$ , es el número de veces que cabe el radio del círculo en su circunferencia.			
Dos recipientes cilíndricos, tienen la misma capacidad si tienen el mismo diámetro en la base y la misma altura.			

3 Paulina, quiere decorar una sencilla lámpara colgando en su contorno hileras de piedras de colores. En cada colgante, va a poner 2 piedras verde, 5 rojas y 2 azules. Si el diámetro de la lámpara es de 35 cm y la distancia entre dos colgantes contiguos es de, aproximadamente, 1 cm: (2 puntos c/u).



a) ¿Cuántos colgantes llevará la lámpara?



b) ¿Cuántas piedras rojas, azules y verdes necesita para decorar la lámpara?



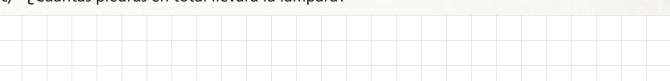
140

Módulo 3 Temas de geometría

10 11 12 13 14 15

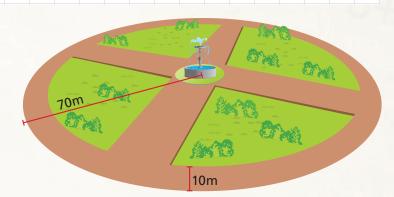


c) ¿Cuántas piedras en total llevará la lámpara?



4 En una plaza de forma circular, de 70 m de radio, hay una fuente, también de forma circular de 5 m de radio, situada en el centro, como se muestra en la figura. (2 puntos c/u).

Algunos vecinos, salen a correr a diario alrededor de ella sobre la superficie de tierra, sin pisar el césped.



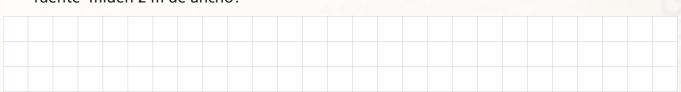
a) ¿Cuántos metros corre un vecino que da 10 vueltas alrededor de la plaza?



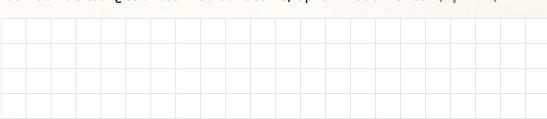
b) ¿Cuál es el perímetro de la zona con pasto?



c) ¿Cuántos metros cuadrados de pasto hay que regar a diario si los caminos que llevan a la fuente miden 2 m de ancho?



Una pista de carrera circular, tiene un radio de 80 m. Un corredor, que va por el borde de la pista, da 100 vueltas. ¿Cuántos metros recorre, aproximadamente? (2 puntos).



Unidad 2 Círculos y cilindros



#### **SÍNTESIS MÓDULO 3**

En este módulo, hemos estudiado algunos teoremas importantes de la geometría plana, relacionados con la suma de los ángulos interiores de un triángulo y con la longitud de los lados de un triángulo rectángulo.

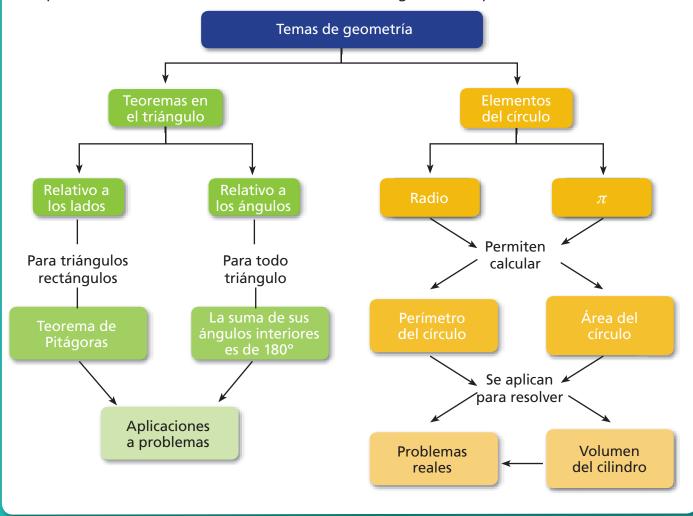
Hemos conocido las figuras redondas y sus aspectos más relevantes.

En la unidad 1, estudiamos las relaciones entre los ángulos que se forman al intersectar dos rectas paralelas por una recta transversal. Esta poderosa propiedad nos permitió establecer que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es siempre igual a un ángulo llano (180°).

Aprendimos el teorema de Pitágoras, vimos su demostración y lo aplicamos a situaciones concretas de la vida real.

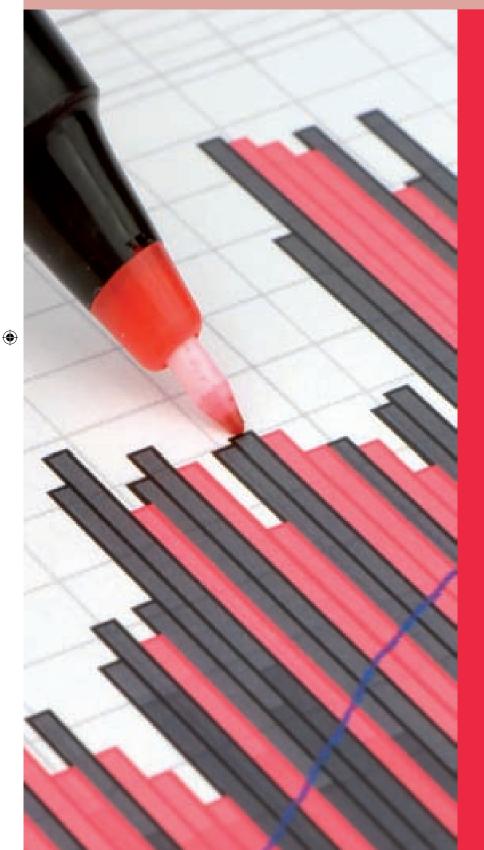
En la unidad 2, trabajamos con figuras redondas. Aprendimos a identificar y analizar los elementos de una circunferencia (radio, diámetro, etc.), a calcular su perímetro y su área. Conocimos el numero  $\pi$  y su relación con las figuras redondas. Aprendimos, también, a determinar el volumen de un cilindro. Aplicamos estos conocimientos a problemas cotidianos.

Lo aprendido en este módulo lo sintetizamos con los siguientes esquemas:





Módulo 4



# Tratamiento de información

Unidad Tablas y gráficos

Unidad 2

Medidas de tendencia central



Unidad 1

# Tablas y gráficos



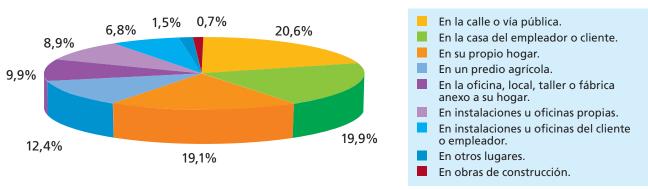


### Trabajadores por Cuenta Propia

Sebastián y su grupo de amigos, están haciendo una investigación sobre distintos aspectos relacionados con una organización social llamada Trabajadores por Cuenta Propia. Se entiende que un **Trabajador por Cuenta Propia**, es aquella persona que *realiza una actividad económica a título lucrativo*, *de forma habitual, personal y directa, sin estar sujeto a un contrato de trabajo*. Por ejemplo, una persona que tiene un minibus escolar o aquella que tiene un almacén en su casa.

Como esta actividad es tan diversa, los estudiantes están buscando información sobre los lugares más frecuentes donde realizan su jornada los Trabajadores por Cuenta Propia y se han encontrado con el siguiente gráfico:

#### Distribución de los trabajadores por cuenta propia según lugar de trabajo Total nacional trimestre septiembre - noviembre 2010



Fuente: www.biobiobox.cl/.../estudio-del-ine-trabajadores-por-cuenta-propia-alcanzan-el-209-del-total-de-ocupados-en-el-pais/

Observando atentamente el gráfico, usted cree que Sebastián podrá responder:

- ¿En qué fecha está hecho este estudio?
- ¿En qué lugar de trabajo se concentra la mayor cantidad de personas?
- ¿Qué porcentaje de estos trabajadores lo hace en su casa?
- ¿Conoce a alguien que desempeñe este tipo de trabajo?
- ¿Puede dar ejemplos de trabajadores de cada categoría?
- Si los entrevistados fueron 2.000 personas, ¿cuántas de ellas trabajan en un predio agrícola?
- Si hay 700 personas que trabajan en la casa del empleador o cliente, ¿a cuántas personas entrevistaron?

En esta unidad, aprenderemos a interpretar y construir gráficos circulares, además aprenderemos a analizar e interpretar información presentada en tablas de datos con más de dos columnas, es decir, aquellas que establecen relaciones entre más de dos variables.

**Unidad 1** Tablas y gráficos





### Interpretación y lectura de información

#### Tablas de datos

Hay varias formas en que los medios de comunicación nos presentan información relevante del día a día, una de estas son las Tablas de datos. El análisis de tablas, en general, requiere poner atención a todas las variables que están en juego, al tipo de dato representado y a las relaciones que existen entre estas. Debemos realizar comparaciones y establecer tendencias a partir de la información que en ellas se registra.

# Actividad grupal

En un hospital, durante el año 2008, se ha desarrollado una investigación considerando una muestra de 137 pacientes diabéticos, pertenecientes al sector sur de Santiago, con el objetivo de incrementar el nivel de conocimientos sobre salud bucal de estos pacientes y con ello mejorar tanto su salud bucal como su calidad de vida.

Los datos de los pacientes se registraron en la siguiente tabla:

**Tabla 1:** Distribución de pacientes diabéticos según edad y sexo.

Grupos de edades	Sexo					
	Femenino		Masculino		Total	
	Cantidad	(%)	Cantidad	(%)	Cantidad	(%)
< 15 años	1	0,7	1	0,7	2	1,5
16 – 29	2	1,5	3	2,2	5	3,6
30 – 44	18	13,1	12	8,8	30	21,9
45 – 59	31	22,6	16	11,7	47	34,3
60 y más	24	17,5	29	21,2	53	38,7
Total	76	55,5	61	44,5	137	100

Observe la tabla de datos y responda:

- ¿Qué variables están representadas en la tabla?
- 2 ¿Qué representa el número 3,6 que está en la segunda fila?
- ¿Cuál es el número de pacientes con diabetes menores de 15 años y qué porcentaje representa del total de ellos?
- 4 ¿Qué porcentaje del total de los enfermos representan las mujeres menores de 30 años?
- 5 ¿Entre qué edades se presenta la mayor cantidad de pacientes afectados por esta enfermedad?



Recordemos que una tabla de datos es un arreglo que tiene un cierto número de filas y de columnas, que permite registrar información en forma ordenada y sintetizada, de modo que sea sencilla y eficiente en su lectura.

A continuación, analizaremos una tabla de datos que nos permitirá saber cómo los chilenos han incrementado los bienes durables en sus hogares, durante un período de 10 años.

En la siguiente tabla, se registran datos recogidos en los últimos censos, acerca del número de personas que viven en hogares con acceso a ciertos bienes durables.

## Porcentaje de personas que viven en hogares con acceso a bienes durables



	1992 (%)	2002 (%)
	1992 (70)	2002 (70)
TV blanco/negro	51	15,1
TV color	54,4	89,2
Video grabador	19,3	38,4
Equipo alta fidelidad	32,3	69,6
Lavadora	50,2	83,3
Refrigerador	55,8	84,6
Microondas	4,4	31,4
Teléfono celular	1,1	53,8
Teléfono fijo	23,8	53,4
Secadora o centrífuga	s/i	45
Computador	s/i	22,4
Conexión a Internet	s/i	11

s/i: Sin infromación.

Fuente: INE.

Con respecto a la información contenida en la tabla, responda:

- ¿Qué variables están representadas en la tabla?
- ¿Qué representan las cifras 19,3 y 38,4, de la tercera fila?
- Cuál de los bienes de la tabla está en más del 70% de los hogares, en el 2002?



- 4 ¿Cuál de estos bienes ha experimentado un mayor aumento entre 1992 y 2002?
- 5 Escriba, al menos, dos conclusiones que se podrían extraer de estos datos.
- 6 Un comentarista, afirma que los datos reflejan un aumento del afán consumista de los chilenos. En cambio, otro opina que los datos muestran un mejoramiento de la calidad de vida en el período estudiado. ¿Qué opina usted? Fundamente su respuesta y compártala con el curso.

Las variables de una tabla de datos son aquellos elementos a los que se les asignan valores cualitativos o cuantitativos. Normalmente, se escriben en las primeras filas o en las columnas de la izquierda.

Analizando la tabla anterior, vemos que las variables que se representan son los bienes durables y los porcentajes de personas que tienen acceso a ellos, entre los años 1992 y 2002.

Por ejemplo, los porcentajes 19,3 y 38,4 indican que en el año 1992 de cada 100 personas entrevistadas 19,3 tenían video grabador y el año 2002 esa cifra aumentó a 38,4 de cada 100.

El año 1992, ninguno de los bienes estaba en un gran número de hogares. Para el año 2002, hay bienes que están en más del 70% de los hogares, por ejemplo: televisor en colores, lavadora y refrigerador.

Para determinar la variación que han experimentado los bienes mencionados, basta con restar los porcentajes en cada fila y el valor que se obtiene es la diferencia o variación.

El bien que ha experimentado el mayor aumento en este período es el teléfono celular, que fue de 52,7 puntos.

Módulo 4 Tratamiento de la información



A partir de los datos de la tabla podemos concluir, por ejemplo, que el televisor en colores reemplazó al blanco y negro, puesto que el primero aumentó a casi un 90% y el segundo bajó al 15,1%.

También, se observa la masificación en los hogares de los artefactos básicos como lavadora y refrigerador. Lo más notable, sin duda, es el aumento en la cantidad de teléfonos celulares.





La siguiente encuesta, fue publicada por el diario El Mercurio durante el mes de diciembre de 2010. Los datos fueron obtenidos de usuarios de Internet que acceden a la página www.emol.cl

¿Cómo entretiene a sus hijos durante las vacaciones, si usted está trabajando?

Actividad	Preferencias (%)		
Ve televisión.	2		
Invita amigos a la casa.	33		
Asiste a clases de verano.	51		
Vacaciones con parientes.	14		
Número de votos: 310			
Fecha de inicio: 13/12/2010			
Fecha de término: 20/12/2010			

Con dos o tres compañeros o compañeras, comenten los datos de la tabla y luego, respondan las preguntas siguientes:

- ¿Qué características podrían tener las personas que respondieron esta encuesta? ¿Se entrega ese dato en esta información?
- Si se hiciera esta encuesta en el curso, ¿se podría esperar que los resultados fueran los mismos?
- Apliquen esta misma encuesta en todo el curso y analicen si los resultados son similares a los de la encuesta del diario.
- ¿Qué tipo de conclusiones se pueden sacar con estas encuestas, en función de quienes las responden? Elaboren una lista de, al menos, cuatro conclusiones y compártanla con los otros grupos.







#### ¿Es más barato usar la tarjeta de crédito que sacar un avance en efectivo?

Una investigación realizada por el SERNAC en diciembre del 2010, muestra que el costo total de un avance en efectivo de \$100.000 en 12 cuotas, puede ir desde \$103.891 (\$3.891 más de lo que se pidió) hasta \$243.407 (\$143.407 más de lo que se pidió), lo que significa una diferencia de \$139.516 o un 134% de incremento sobre el total más bajo.

Es decir, un consumidor puede terminar pagando más del doble de lo que pidió si accede a las condiciones menos convenientes.

Ocurre que las entidades prestadoras no cobran los mismos montos a todos sus clientes. Esto es, la institución hace una evaluación económica del cliente considerando los productos asociados que tenga, el riesgo que represente, las condiciones de la operación, etc, según esto, el cliente puede pagar hasta \$125.209 de diferencia por el mismo préstamo.

En la siguiente tabla, se registran y comparan los costos de un avance en efectivo o crédito simple de \$100.000 a 12 meses con la simulación de la compra, con trajeta de crédito, de un televisor de ese mismo valor. Para ambos productos se han considerado los cobros máximos y mínimos que la institución hace a sus clientes.

Entidad	Min. Avance en efectivo	Min. Compra televisor	Diferencia	Max. Avance	Max. Compra	Diferencia
ABC Din	\$ 123.377	\$ 103.880	\$ 19.497	\$ 144.857	\$ 151.580	- \$ 6.723
Banco de Chile	\$ 110.571	\$ 100.600	\$ 9.971	\$ 200.683	\$ 165.820	\$ 34.863
Banco Estado	\$ 115.029	\$ 100.600	\$ 14.429	\$ 137.205	\$ 122.776	\$ 14.429
Banco Falabella	\$ 104.228	\$ 104.228	0	\$ 144.007	\$ 144.007	0
Banco París	\$ 123.283	\$ 121.083	\$ 2.200	\$ 145.588	\$ 143.388	\$ 2.200
Banco Santander	\$ 118.198	\$ 100.600	\$ 17.598	\$ 243.407	\$ 200.992	\$ 42.415
Banefe	\$ 127.366	\$ 100.600	\$ 26.766	\$ 186.874	\$ 144.364	\$ 42.510
BCI	\$ 110.276	\$ 100.600	\$ 9.676	\$ 189.113	\$ 154.660	\$ 34.453
CMR	\$ 120.380	\$ 119.863	\$ 517	\$ 137.144	\$ 136.627	\$ 517
Corona	\$ 138.095	\$ 137.516	\$ 579	\$ 168.481	\$ 161.300	\$ 7.181
Corpbanca	\$ 111.506	\$ 100.600	\$ 10.906	\$ 225.216	\$ 188.656	\$ 36.560
Hites	\$ 130.119	\$ 119.594	\$ 10.525	\$ 181.877	\$ 234.031	- \$ 52.154
Más Easy	\$ 125.868	\$ 113.237	\$ 12.631	\$ 153.259	\$ 149.583	\$ 3.676

- a) ¿Qué representan los datos de la segunda columna? Y, ¿los de la quinta columna?
- b) ¿Qué entidad cobra los mayores intereses por un avance en efectivo, suponiendo que cobrara los valores máximos?
- c) ¿En qué entidad es más económica la compra con tarjeta de crédito, suponiendo que pagásemos el mínimo?
- d) ¿En alguna de estas entidades es más conveniente el avance en efectivo que el uso de la tarjeta de crédito para comprar un producto?



- e) ¿Hay alguna información que crea que le falta a la tabla?
- f) ¿Qué conclusiones se pueden obtener de este estudio de mercado? Elabore una respuesta y compártala con el curso.

### ¿Cuesta lo mismo la bencina en todas las regiones del país?

El siguiente estudio sobre los precios promedio de las bencinas de diferentes octanos, en las distintas regiones del país, fue realizado por el SERNAC en el mes de marzo de 2011.

En la tabla, se resumen los precios promedio observados en cada capital regional:

#### Precios mínimos y máximos por tipo de gasolina

Capital regional	Gasolinas (\$ / litro)			Petróleo Diesel	Kerosén Doméstico
. 3	93	95	97	(\$ / litro)	(\$ / litro)
Iquique	732,7	744,9	757,2	594,1	n/e (*)
Antofagasta	746,7	761,9	776,9	611,7	n/e (*)
Copiapó	751,3	768,8	792,5	609,5	n/e (*)
La Serena	729,8	747,8	771,6	598,9	621,5
Valparaíso	734,7	752,8	772,8	592,3	589,9
Rancagua	753,7	773,2	793,4	612,0	576,0
Talca	744,8	754,4	769,6	602,0	553,5
Concepción	755,5	771,1	789,5	616,3	571,9
Temuco	768,0	775,1	786,6	623,9	612,0
Puerto Montt	786,4	791,4	799,1	638,4	598,8
Coyhaique	766,0	782,0	805,2	627,3	602,4
Punta Arenas	742,3	759,3	777,1	612,5	n/e (*)
Arica	779,5	787,1	799,3	634,0	631,7
Valdivia	721,8	735,8	752,4	593,5	n/e (*)
Santiago	700,9	718,9	742,6	573,8	565,5

Fuente: SERNAC

\*n/e= no expende (no vende el producto)

Considerando los datos de la tabla, determine:

- a) ¿Cuáles son las variables de la tabla?
- b) ¿En qué ciudad se encuentra la bencina de 95 octanos más barata? Y, ¿en qué ciudad la más cara?
- c) ¿Por qué cree que en algunas no se vende kerosene de uso doméstico? Y, ¿a qué cree que se deban las variaciones de su precio de una ciudad a otra?
- d) ¿Qué factores cree usted que influyen en las alzas de los combustibles?

Unidad 1 Tablas y gráficos





### **Gráficos Circulares**

Los gráficos estadísticos, son una herramienta muy útil para presentar datos en forma visual, de tal modo que se puedan percibir fácilmente los hechos relevantes y se puedan, también, comparar unos datos con otros.

En el nivel anterior, aprendimos a usar los gráficos de barras, a leer información desde ellos y a construirlos para mostrar información. Si bien estos constituyen una poderosa herramienta para el análisis y registro de datos, existen otro tipo de gráficos que pueden ser más eficientes en ciertos contextos, a continuación trabajaremos con los **gráficos circulares**.

Un gráfico circular es una forma visual, pictórica, de representar la manera en que se distribuye un todo en diferentes partes.

Un círculo, se usa para representar el todo y, tal como se reparte una torta, se divide en las partes que constitu-yen la clasificación. Es por esto que los gráficos circulares son muy útiles en las representaciones de porcentajes. Se usan normalmente para realizar comparaciones entre grupos.



Fuente: http://www.xsblog.es/humor/%C2%BFque-hacemos-en-la-ducha/

El siguiente gráfico circular muestra las condiciones del cielo en la ciudad de Ancud, al sur de Chile, durante 20 días consecutivos, dividiéndolos en días soleados, días nublados y días lluviosos.

De acuerdo al gráfico:



Fuente: Diario La Estrella de Chiloé

- a) ¿Cuántos días estuvo soleado? \_
- b) ¿Qué porcentaje de los días estuvieron lluviosos? \_
- c) ¿Qué porcentaje del total de días presentados, representa cada caso en cuestión? \_\_\_\_\_\_
- d) ¿Cuántos días no llovió? \_\_\_\_\_\_
- e) ¿Está de acuerdo con la afirmación: "más del 50% del tiempo estuvo lloviendo"? \_\_\_\_\_\_
- f) ¿Qué estación del año estará representada en este gráfico? Usted, ¿visitaría este lugar en esta

época del año? \_\_

152

Módulo 4 Tratamiento de la información



Haciendo el análisis del gráfico anterior, vemos que los días soleados, lluviosos y nublados son las tres partes del todo, por lo que su suma representa el 100% de los casos (el cielo debe tener una de las tres condiciones).

En este gráfico, los días soleados están representados con el sector circular pintado en celeste; la porción del círculo que ocupa es claramente la más grande y por lo tanto, representa más del 50% del total, son 11 días.

Los días lluviosos fueron 3, ¿qué porcentaje, del total, es esa cantidad?

Para determinar este porcentaje, necesitamos calcular qué parte de los 20 días representan 3 días y luego, multiplicarlo por 100.

Esto es:

$$\frac{20 \text{ días}}{3 \text{ días}} = \frac{100\%}{a} = \frac{3 \times 100}{20} = \frac{300}{20} = 15$$

Es decir, los días lluviosos representan el 15% del total.

Para determinar el porcentaje que representan los días soleados, que fueron 11, hacemos el cálculo:

$$\frac{20 \text{ días}}{11 \text{ días}} = \frac{100\%}{a} = \frac{11 \times 100}{20} = \frac{1100}{20} = 55$$

Entonces, los días soleados fueron el 55%.

Para determinar el porcentaje que representan los días nublados, basta restar a 100 la suma de los porcentajes ya calculados:

$$100 - (15 + 55) = 100 - 70 = 30$$

Por lo tanto, el 30% de los días fueron nublados.

 Si hubo solo 3 días lluviosos, de un total de 20 días observados, los días que no llovió fueron, por lo tanto, 17.

### Construcción de gráficos circulares

En una encuesta realizada a 100 personas acerca de sus preferencias entre cine, radio o televisión, se han obtenido los resultados que figuran en la tabla. Veamos cómo representar los resultados de esta encuesta, en un gráfico circular.

Preferencias	Número de personas
Televisión	40
Radio	25
Cine	35
Total	100

Para ello, debemos tener en cuenta que el ángulo de cada sector circular es directamente proporcional a la cantidad de personas que representa, es decir, a mayor número de personas le corresponderá una mayor porción de la circunferencia, o un mayor ángulo central.



Observe cómo se calcula cada uno de los ángulos para hacer el gráfico circular.

Debemos determinar a cuántos grados equivale una persona, para luego multiplicar cada caso por el número de personas y así obtener su porcentaje.

El círculo completo tiene 360 grados, dividido en cien partes iguales:

Es decir, a cada persona le corresponde 3,6 grados.

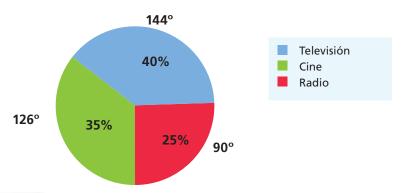
Por lo tanto:

40 personas = 
$$40 \times 3,6 = 144$$
 grados.

25 personas = 
$$25 \times 3,6 = 90 \text{ grados}.$$

35 personas = 
$$35 \times 3,6 = 126 \text{ grados}.$$

Con estos datos, ya podemos construir el gráfico circular que representa las preferencias de los entrevistados:



## Actividad grupal

De acuerdo con el Sistema Económico Latinoamericano y del Caribe (SELA), organismo intergubernamental integrado por 26 países de América Latina y del Caribe, entre ellos Chile, el PIB (Producto Interno Bruto) de los ocho países que integran el llamado G8 (Estados Unidos, Canadá, Gran Bretaña, Francia, Alemania, Italia, Japón, Rusia), alcanza el 64% del PIB mundial, en tanto que su población solo llega al 13% de la población mundial. (www.sela.org)



#### En un papelógrafo:

- a) Construyan un gráfico circular que relacione el PIB del G8 con el PIB del resto del mundo.
- b) Construyan un gráfico circular que relacione la población del G8 con la población mundial.
- c) ¿Qué conclusión pueden obtener mirando los gráficos que han construido? Expongan su trabajo y compartan sus conclusiones.



La siguiente tabla, muestra los resultados de una encuesta hecha a 76 jóvenes de 1° y 2° medio del liceo comercial, acerca de sus preferencias por ciertos tipos de películas.

Tipo de película	Cantidad de jóvenes	%
Comedia	13	
Terror	8	
Acción	26	
Romance	18	
Guerra	11	

Completen la tabla, y construyan un gráfico circular en el que se muestren, en porcentaje, las preferencias indicadas en la tabla.



Solo observando el gráfico que construyeron, respondan:

- a) ¿Qué tipo de película tiene la mayor preferencia entre los jóvenes?
- b) ¿Cuántos jóvenes fueron entrevistados?
- c) ¿Qué porcentaje prefiere películas románticas?
- d) ¿Qué porcentaje de los jóvenes prefiere las películas de acción?
- e) Comparando ahora sus respuestas con la tabla de datos, ¿son consistentes con las respuestas que dieron desde el gráfico que construyeron? Compartan sus resultados y su análisis, con el curso.







### Comparación de gráficos

Los gráficos son poderosas herramientas para visualizar, entender y recordar importante cantidad de información. Sin embargo, de acuerdo al tipo de información, a la cantidad y a las relaciones existentes entre las variables en juego, se usan distintos tipos de gráficos.

No obstante, existen situaciones en las que definitivamente no se pueden ocupar algunos tipos de gráfico. Por ejemplo, el gráfico de barras no debe usarse en ciertos problemas de porcentajes, el gráfico circular es el recomendado cuando se grafican las partes de una unidad.

A continuación, veremos un ejemplo en el cual el gráfico de barras **no** puede usarse.

Con la finalidad de ofrecer a sus estudiantes cursos electivos de perfeccionamiento, el colegio Las Magnolias de Concepción ha hecho una encuesta sobre las preferencias que tienen los estudiantes de 4° medio, en distintos sectores de aprendizaje.

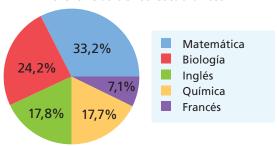
El porcentaje que prefiere uno u otro sector, se ha registrado en la tabla de la derecha.

El siguiente gráfico circular representa los datos de la tabla, mostrando cómo se dividen, porcentualmente, las preferencias de los estudiantes en los distintos sectores de aprendizaje.

Libros disponibles en la biblioteca

Sector de aprendizaje	Preferencia (%)	
Matemática	33,2	
Biología	24,2	
Inglés	17,8	
Química	17,7	
Francés	7,1	
Total	100	

Preferencias de los estudiantes



• ¿Hay algún sector que tenga más del 30% de las preferencias? Y, ¿hay alguno que tenga más del 50%?

Observando el gráfico, podemos notar que el 30% de las preferencias representaría, aproximadamente, un tercio del dibujo; podemos ver que Matemática alcanza ese porcentaje, el dato numérico lo confirma.

El 50% de las preferencias correspondería a la mitad del círculo y ningún color ocupa tanto espacio, por lo tanto, ningún sector tiene esa popularidad.

 Si fueran 100 los estudiantes encuestados, ¿cuántos elegirían Biología como su asignatura favorita?

Puesto que el 17,8% prefiere Inglés, si fueran 100 los estudiantes encuestados, 18 tomarían ese ramo (no podrían ser 17,8 personas, por lo que se debe aproximar al entero más cercano, en este caso es 18).

**Módulo 4** Tratamiento de la información

156



¿Es posible representar los datos de esta tabla en un gráfico de barras?

No. Para representar este tipo de información porcentual, en el que se ha dividido una unidad (el total de estudiantes), no es posible usar gráfico de barras, ya que no sabemos las cantidades netas que representan cada porcentaje. El gráfico circular es el que mejor representa esta clase de distribuciones.



¿Qué tipo de gráfico, circular o de barra, representaría mejor la información de la siguiente tabla? Justifique su respuesta y construya el gráfico.

Continente	Cantidad de personas (en millones)
Europa	498
Asia	3113
América	724
África	624
Oceanía	26



Existen otras situaciones en las que, definitivamente, no se pueden ocupar ciertos tipos de gráficos, por ejemplo, el gráfico circular solo puede usarse cuando se grafican las partes de una unidad.



El siguiente enlace le ayudará a repasar el tema de gráfico circular y su utilidad.

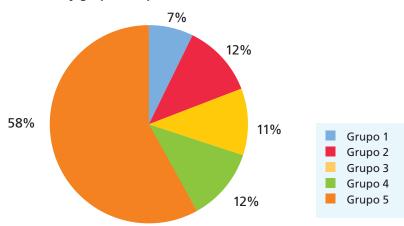
http://www.ucv.cl/web/estadistica/gr\_grafcirc.htm

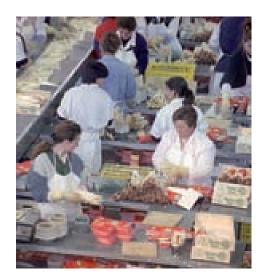


Discuta con sus compañeros y compañeras:

De acuerdo al último Censo (2002), el porcentaje de inserción de las jefas de hogar en el mundo laboral, según el tipo de actividad que realizan y grupos ocupacionales, está representada en el siguiente gráfico circular:

Inserción de las jefas de hogar según condición de actividad y grupos ocupacionales. Censo 2002





Fuente: INE.

Las ocupaciones que integran cada grupo, están representadas en el recuadro a continuación:

Grupo 1	<ol> <li>Miembros del poder ejecutivo y de los cuerpos legislativos y personal directivo de la administración pública y empresas privadas.</li> <li>Profesionales científicos e intelectuales.</li> </ol>				
Grupo 2	<ul><li>3. Técnicos y profesionales de nivel medio.</li><li>4. Empleados y empleadas de oficina.</li></ul>				
Grupo 3	<ol> <li>Trabajadores de servicios y vendedores de comercio y mercado.</li> <li>Agricultores y trabajadores o trabajadoras calificados agropecuarios y pesqueros.</li> <li>Oficiales, operarios y artesanos de artes mecánicas y de otros oficios.</li> <li>Operadores y operadoras de instalaciones y máquinas y montadores.</li> </ol>				
Grupo 4	9. Trabajadores o trabajadoras no calificados.				
Grupo 5	10.Inactivos.				

De acuerdo a los datos del gráfico, responda:

a) ¿Qué porcentaje de las jefas de hogar son trabajadoras no calificadas?



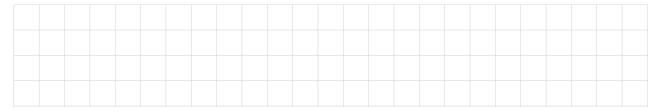
b) De cada cien jefas de hogar, ¿cuántas están inactivas?



c) De cada cien jefas de hogar, ¿cuántas son técnicos o profesionales de nivel medio o empleadas de oficina?



d) ¿Qué diferencia porcentual existe entre las jefas de hogar que pertenecen al grupo 1 y las que están inactivas?



### Nivel educativo en la población.

Estudios revelan que la pertenencia a un estrato social está asociada con las oportunidades de educación de los individuos.

De acuerdo al Censo 2002, la estratificación socio-ocupacional que caracteriza a la sociedad chilena, agrupa a los jefes y jefas de hogar activos, en tres grandes estratos:

**Estrato alto**: integrado por los hogares cuyos jefes y jefas son profesionales, directivos de empresas públicas y privadas y miembros del poder ejecutivo y de los cuerpos legislativos.

**Estrato medio**: integrado por los hogares cuyos jefes y jefas son técnicos y profesionales de nivel medio y empleados de oficina.

**Estrato bajo**: diferenciado en bajo calificado y bajo no calificado.

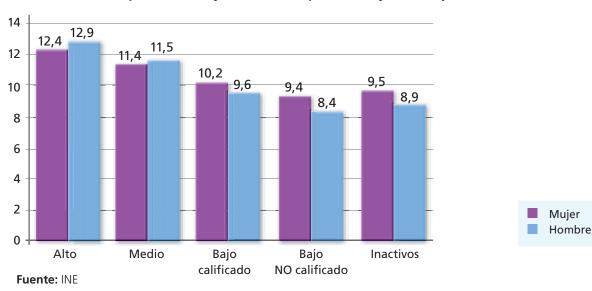
- Bajo calificado: integrado por los hogares cuyos jefes y jefas son trabajadores de los servicios y vendedores de comercio y trabajadores manuales calificados.
- Bajo no calificado: integrado por los hogares cuyos jefes y jefas son trabajadores manuales no calificados.

lacktriangle



A continuación, se muestra un gráfico de barras comparadas en que se puede apreciar los niveles educativos de la población, según sexo y estrato socio-ocupacional del jefe y jefa de hogar, se agregan los jefes y jefas de hogar inactivos.

Años de estudio de la población (mayor de 14 años) por estrato y sexo del jefe. Censo 2002



De acuerdo a la información que podemos obtener del gráfico, responda:

- a) ¿En qué sector se aprecia el mayor número de años de estudio de las jefas de hogar?
- b) ¿Qué diferencia de años de estudio, promedio, se aprecia entre las jefaturas femeninas y masculinas del estrato bajo calificado? Y, ¿en el estrato bajo no calificado? ¿A qué cree usted que se deba esto?



c) En los hogares con jefatura femenina, ¿qué diferencia en años de estudio, promedio, se observa entre el estrato bajo no calificado con el estrato alto?



d) ¿Qué diferencia en años de estudio, promedio, se aprecia entre los hogares con jefatura femenina y masculina en el sector alto? Y, ¿en el medio? ¿A qué cree usted que se deba esto?



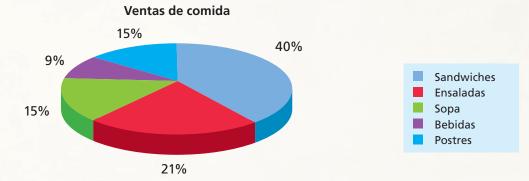
160



### **EVALUACIÓN**

### Puntaje total Evaluación 19 puntos

El siguiente gráfico circular, representa los porcentajes de ventas de un local de comida ubicado en una calle del centro de una ciudad, con alto flujo de público.



Observe atentamente el gráfico y responda: (1 punto c/u).

- a) ¿Cuál es el producto que tiene mayor salida?
- b) ¿Qué es lo que se vende menos?
- c) ¿Hay algún alimento que represente el 50% de las ventas? \_\_
- Observe atentamente el siguiente gráfico de barras, que muestra información sobre el porcentaje de participación de la población extranjera, en el total de una población determinada. Responda las preguntas que se hacen a continuación: (2 puntos c/u).



- a) ¿Qué información está entregando el gráfico?
- b) El porcentaje de extranjeros en esta comunidad, ¿habrá aumentado para el 2020?
- c) ¿Cómo ha evolucionado la población extranjera, de acuerdo al gráfico?
- d) Si el año 1870 la población total era de 200.000 personas, ¿cuántos eran extranjeros?

•

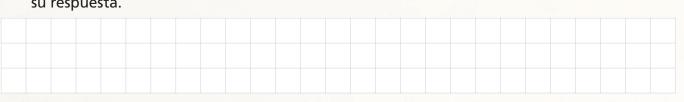
En una ciudad cuya población laboralmente activa es de 15.000 personas, se realizó una encuesta para averiguar la cantidad de individuos que trabajan en tres sectores productivos. Los resultados se registraron en una tabla como la siguiente: (2 puntos).

Sector	Cantidad de personas	
Obtención de recursos	3.000	
Industrial	5.000	
Comercio – Servicios	7.000	

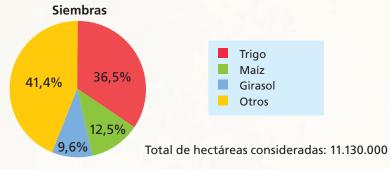
a) Determine qué porcentaje, del total de personas, representan aquellas que trabajan en el sector de comercio y servicios.

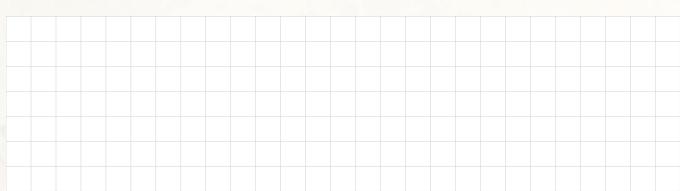


b) ¿Qué tipo de gráfico representa mejor los datos de la tabla, uno circular o de barras? Justifique su respuesta.



4 Construya una tabla que represente la información del gráfico circular: (4 puntos).





162

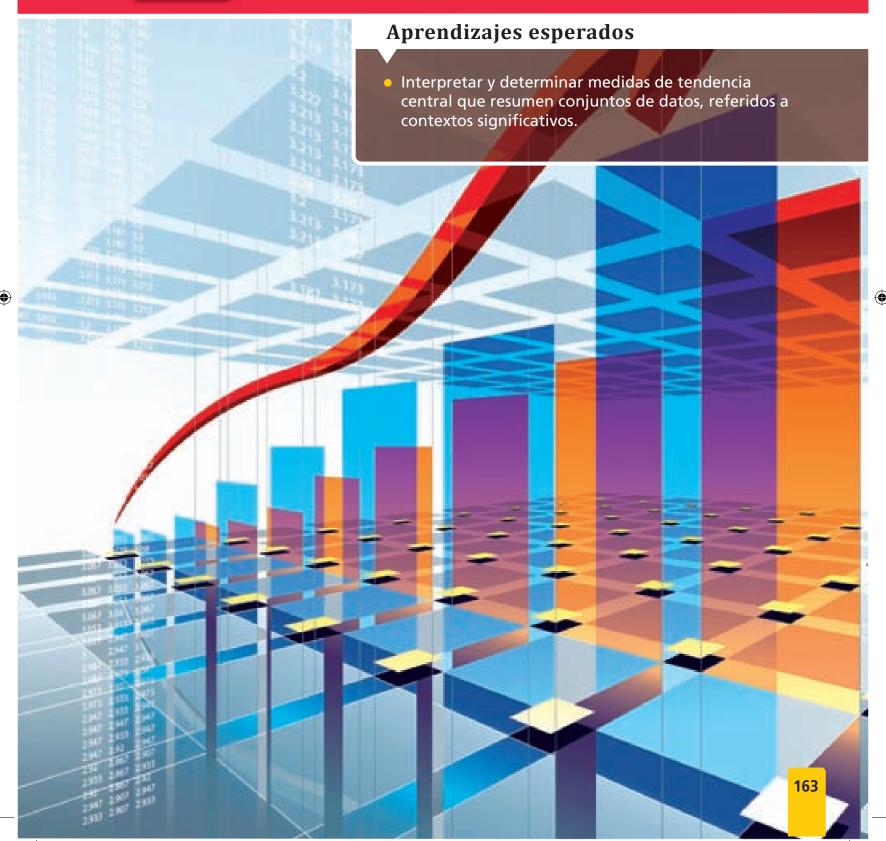
Módulo 4 Tratamiento de la información

11 12 13 14 1



Unidad 2

# Medidas de tendencia central



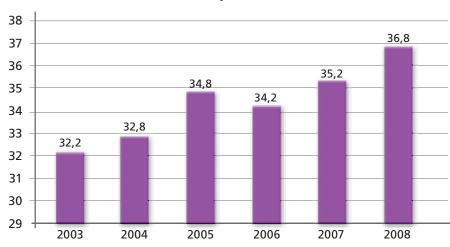


### Ocupación femenina

Marcela, ha comenzado a trabajar en la unidad de atención social para la municipalidad de Ancud, le han solicitado un informe acerca del porcentaje nacional de ocupación femenina, del trimestre mayo, junio y julio, entre los años 2003 y 2008.

Buscando información en Internet, Marcela se ha encontrado con el siguiente gráfico de barras:

Tasa (%) de ocupación femenina (Ocupadas/PET)
Trimestre Mayo-Julio de cada año



Fuente: Encuesta Nacional del Empleo, INE.

Marcela debe contestar las siguientes preguntas para completar su informe:

- ¿Cuál es el porcentaje de mujeres desocupadas durante el segundo trimestre de los años 2004 y 2005?
- ¿En qué año del período 2003-2008 hubo mayor desempleo durante este trimestre?
- ¿En qué año hubo mayor empleabilidad femenina durante el segundo trimestre?
- ¿Cuál es el porcentaje promedio de desempleo durante este período?
- ¿Cuál es la tendencia con respecto al empleo, aumentar o disminuir las oportunidades laborales en este periodo?
- ¿Cree usted que el año 2009 habrá más o menos mujeres con empleo?
- ¿Es posible averiguarlo con este gráfico?

La unidad que ahora iniciamos, nos ayudará a encontrar respuesta a estas y otras interrogantes estadísticas.





### Medidas de tendencia central

La estadística busca, entre otras cosas, describir las características típicas de un conjunto de datos.

Las **medidas de tendencia central**, son indicadores estadísticos que muestran hacia qué valor (o valores) se agrupan los datos.

Estos valores, generalmente, se ubican en la parte central del conjunto de datos y nos ayudan a representar la información en un solo número.

Las medidas de tendencia central que estudiaremos en esta unidad son: la **media aritmética** o **promedio**, la **mediana** y la **moda**.

# Actividad grupal

En el sector de artículos electrónicos de una casa comercial, se constituyó un equipo de monitoreo atendiendo las quejas de los clientes sobre la lentitud en las ventas y las largas filas en las horas punta (mayor afluencia de público).

El equipo, registró en una tabla el tiempo que tardaron 3 empleados en realizar cada venta, durante la hora punta típica. Según los resultados, decidirán si es necesaria la contratación de otro empleado. En total, se realizaron 30 ventas, cuya duración se muestra en la tabla:

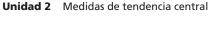
# Tiempo, en minutos, de duración de 30 transacciones en hora punta

2,5	2	1,5	2	3,5
4	3,5	2	2,5	4
1,5	2,5	2	1,5	1,5
3,5	1,5	2,5	2	2,5
2	4	3,5	2,5	3,5
1,5	3,5	1,5	3,5	2



Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto tardó en realizarse la transacción más demorosa?
- ¿Cuánto duró la transacción más breve?
- 3 ¿Cuántas ventas demoran menos de tres minutos?
- ¿Cuánto tarda, en promedio, en hacerse una venta?
- 6 ¿Cuántas ventas se hicieron en dos minutos, o menos?



# Frecuencia absoluta

Se llama **frecuencia absoluta** al número de veces que se repite un determinado valor, en un estudio estadístico. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

### **Ejemplo:**

Durante el mes de enero, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas (en grados Celsius) desde el día 1 hasta el día 31:

Para ordenar estos datos, vamos a construir una tabla de distribución de frecuencias, en las que se registran las distintas temperaturas y sus respectivas frecuencias, es decir, cuántas veces se alcanzó cada temperatura. En la primera fila de la tabla, colocamos la variable ordenada de menor a mayor y en la segunda, anotamos la frecuencia absoluta.

Temperatura (grados)	27	28	29	30	31	32	33	34	
Frecuencia	1	2	6	7	8	3	3	1	31

A partir de la tabla, podemos leer, por ejemplo, que:

- Solo un día la temperatura alcanzó 34°C.
- Ocho veces la temperatura máxima llegó a los 31°C.
- Más de la mitad del mes, las temperaturas máximas fueron mayor o igual a 30°C.
- Los 40 estudiantes de una clase, han rendido el examen de física. El puntaje mínimo de aprobación es de 30 puntos y el puntaje máximo es de 50.

Los puntajes que obtuvieron fueron los siguientes:

2 Construya una tabla de distribución de frecuencia para estos datos.



- 3 Responda las siguientes preguntas:
  - a) ¿Cuántos estudiantes aprobaron el examen? \_\_\_\_\_
  - b) ¿Cuántos obtuvieron la nota máxima? \_\_\_\_\_\_
  - c) ¿Cuántos estudiantes no alcanzaron la mitad del puntaje mínimo de aprobación?



### Promedio o Media aritmética

El **promedio**, **media aritmética** o simplemente media de un conjunto de datos cuantitativos, es el número que se obtiene sumando todos los datos y luego dividiendo por el número total de datos que se sumó. Si los datos son cualitativos, la media no existe.

La media no necesariamente coincide con alguno de los datos y siempre se encuentra entre el menor y el mayor de ellos.

### **Ejemplo:**

La madre de Cecilia ha decidido cambiarla de colegio, porque no se encuentra conforme con el nivel académico del colegio actual. El nuevo establecimiento, exige tener un promedio final de notas mínimo de 5,5 para postular a la prueba de selección de ingreso.

Las notas de aprobación de Cecilia son:

Sectores de aprendizaje	Nota
Matemática	6,5
Lenguaje	6,0
Biología	4,8
Sociedad	6,1
Filosofía	5,3
Física	4,5
Química	5,5
Ed. Física	7,0
Artes Manuales	6,6

¿Le alcanza el promedio para postular a la prueba de selección?
 El promedio con que se presenta Cecilia es:

Promedio = 
$$\frac{(6,5+6+4,8+6,1+5,3+4,5+5,5+7+6,6)}{9} = \frac{52,3}{9} = 5,8$$

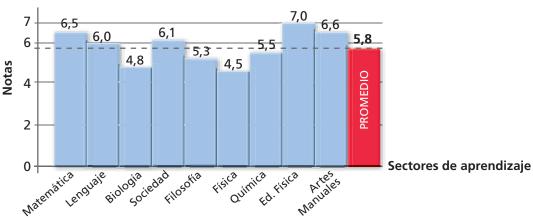
Por lo tanto, con un 5,8 de promedio, sí podrá postular.

Note que el promedio 5,8 es mayor que la nota mínima (5,5) y menor que la nota máxima (7), es decir:

5,5 < 5,8 < 7,0

Además, note que no coincide con ninguna de las notas de las asignaturas.

El siguiente gráfico de barras, muestra la medida del promedio con respecto a los valores de los datos.





#### **Sondeo Combustibles**

El SERNAC, en noviembre del 2010, ha realizado un sondeo sobre los precios promedios de las bencinas, kerosene de uso doméstico y petróleo diesel, en distintas ciudades del norte de nuestro país. Se obtuvieron los valores que se registran en la siguiente tabla:

Combustible	Prec	io promedio (\$) por ciu	ıdad
Combustible	Iquique	Antofagasta	Copiapó
Gasolina 93 s/p*	658,7	659,4	670,4
Gasolina 95 s/p*	670,9	675,3	688,8
Gasolina 97 s/p*	684,6	694,2	713,3
Promedio gasolinas	671,4	676,3	690,8
Petróleo Diesel	496,8	504,5	505,0
Kerosén doméstico	n/e**	n/e**	666,5

<sup>\* =</sup> sin plomo

\*\* = no expendida

Fuente: SERNAC

a) ¿En qué ciudad del norte del país el petróleo diesel se puede encontrar más barato?

b) ¿Cuánto cuesta, en promedio, el litro de petróleo y el de kerosene en el norte?



c) Determine el promedio de la bencina de 95 octanos?



d) Construya un gráfico de barras comparadas que registre los valores de la gasolina de 97 octanos en las tres ciudades.





### Moda

La **moda** en un conjunto de datos, es aquel dato que más se repite, es decir, el valor de la variable con mayor **frecuencia absoluta**.

En cierto sentido, la definición matemática es coherente con la locución "estar de moda", esto es, ser lo que "más se lleva".

Su cálculo es muy sencillo, pues solo necesita un recuento.

### **Ejemplo:**

Desde un puesto de peaje, se ha registrado el número de personas que viajan en los distintos vehículos que ingresan a la carretera, obteniéndose los siguientes valores:

Para facilitar las cuentas, hacemos la tabla de distribuciones absolutas:

Número de personas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	1	3	2	3	6	3	2	0	1

Como el número que más se repite es el 5 (ocurre 6 veces), indica que la mayoría de los autos viajó con 5 personas, por lo tanto la moda es 5.



Si todas las variables tienen la misma frecuencia, diremos que **no hay moda**.

Sus propiedades principales son:

- Cálculo sencillo.
- Puede determinarse tanto para variables cuantitativas como cualitativas, pues solo depende de la frecuencia y no del tipo de datos.



### **Ejemplo:**

Se ha realizado un estudio acerca de las preferencias de los chilenos con respecto a los diarios que consultan y prefieren, a través de internet. Los datos de este estudio, se han registrado en la siguiente tabla:

Diario (versión electrónica)	Número de visitas
Las Últimas Noticias	216.412
La Cuarta	171.176
La Tercera	89.061
El Mercurio	122.436
La Estrella de Arica	52.520
El Llanquihue de Puerto Montt	167.244

En este estudio, las variables son cualitativas: "los diarios". De acuerdo a la información entregada por la tabla, vemos que el diario más visitado, en versión electrónica, es Las Últimas Noticias.

El número de visitas, es la frecuencia con que el diario es leído, por lo tanto la **moda** de este conjunto de datos es el diario "Las Últimas Noticias".









La moda no siempre se sitúa hacia el centro de la distribución y grandes variaciones en los datos, diferentes de la moda, no afectan su valor.

### **Ejemplo:**

El Centro de geriatría de Soacha, en el sur de Colombia, está haciendo un catastro de las edades de los ancianos que residen en los hogares a cargo del Estado. Se han registrado las edades de 30 ancianos, que presentamos a continuación:

Edad de los ancianos	75	77	78	79	80	81	83	86	90
Frecuencia	8	2	1	3	4	5	4	2	1

La moda en este conjunto de datos, es 75, puesto que es el número que tiene mayor frecuencia absoluta (se repite 8 veces), sin embargo, no está al centro de la distribución.

En ciertos grupos de datos, puede haber más de una moda, es el caso en que dos o más valores de la variable presenten la misma frecuencia. De ser así, se dice que la distribución es **bimodal** (dos variables) o **multimodal** (más de dos variables).

Se ha realizado una encuesta a 40 personas, consultándoles por el número de personas con que comparten la vivienda, incluidos ellos mismos. Se han obtenido los siguientes datos:

Construya una tabla de distribución de frecuencias absolutas para estos datos.



Determine la moda del conjunto.







### Mediana

La **mediana** de un conjunto de datos, es el número situado en el centro de la serie de datos. Deja por debajo de sí a la mitad de los datos y por encima, a la otra mitad, una vez que estos han sido ordenados de menor a mayor.

Al conocer la mediana, nos podemos situar exactamente en la mitad del conjunto de datos, después que estos se han ubicado en orden ascendente.

### **Ejemplo:**

Trece familias fueron observadas con respecto al número de veces que asistieron al supermercado durante un mes, los datos obtenidos fueron los siguientes:

Para determinar la mediana, debemos ordenar los datos de menor a mayor y buscar el término del centro:

La mediana de este conjunto es 2, puesto que, una vez ordenados los datos, el que ocupa la posición central, es 2.

En caso de tener un número **par** de datos, la mediana es el valor intermedio o promedio entre los dos términos centrales.

### **Ejemplo:**

Las notas que obtuvieron 14 estudiantes en el examen de ciencias, cuya escala va de 1 a 7, fueron las siguientes:

Para encontrar la mediana, ordenamos los datos de menor a mayor:

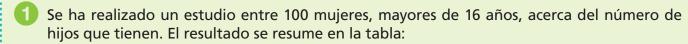
Ahora, buscamos los dos términos centrales:

**Entonces:** 

Mediana = 
$$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$



# Actividad grupal

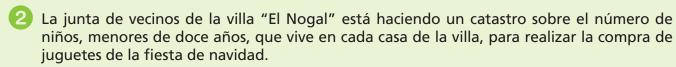


Cantidad de mujeres         Número de hijos           13         0           20         1           25         2           20         6           11         4           7         5           4         6		
20 1 25 2 20 6 11 4	Cantidad de mujeres	Número de hijos
25 2 20 6 11 4	13	0
20 6 11 4	20	1
11 4	25	2
11	20	6
7 5 4 6	11	4
4 6	7	5
	4	6

a) ¿Cuantos hijos tienen, en promedio, las mujeres entrevistadas?



b) ¿Cuál es la mediana y la moda en el número de hijos?



El número de niños que se registró en cada casa está dado por la serie:

a) Construyan la tabla de distribución de frecuencias y dibujen el diagrama de barras.





b)	b) ¿En cuántas viviendas de la villa habitan niños?																					
c)	c) ¿Cuántos niños hay en la villa?									-												
d)	d) ¿Cuál es la mediana de este conjunto de datos y cual es la moda?																					
e)	¿Cu	ánt	os r	niño	s ha	ay, e	n p	ron	nedi	o, e	n c	ada	cas	a d	e la	villa	a El	Nog	gal?			

### Valores de la variable

La mediana es menos sensible que la media a oscilaciones de los valores de la variable.

Por ejemplo:

En la serie de datos: 1, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 9, la mediana es 5 y la media es, aproximadamente, 4,6.

Si cambiamos el último dato de la serie por uno mayor, es decir: 1, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 20, la mediana de esta serie sigue siendo 5, pero su media es 5,8, es decir, aumentó cerca de un 25%.

Si modificamos la serie con un dato menor, tendremos la serie: 1, 1, 1, 4, 5, 6, 6, 6, 9, con mediana 5 y media 4,3.

En ambos casos, la media experimentó un cambio importante, no así la mediana que permaneció constante.

En estudios de población, la mediana es más representativa que la media aritmética cuando la población es muy heterogénea.

Por ejemplo, si se observan las estaturas en un grupo de personas y que claramente tienen mucha diferencia unos con otros, el promedio no representa la estatura de ninguno de los individuos, como se ilustra en el dibujo. En este caso, la mediana puede ser un mejor indicador.





**Estatura Mediana** 



174

Módulo 4 Tratamiento de información



### Un problema de salarios

En una pequeña empresa textil, se registran los siguientes salarios, correspondientes al mes de julio:

Empleado	Salario mes julio (en miles de pesos)				
Pedro Tapia	2.800				
Nelson Jaramillo	650				
Nicolás Rojas	585				
Elisa Norambuena	368				
Rosana Flores	178				
Nelson Sandoval	178				

El promedio de los salarios en esta empresa es:

Promedio = 
$$(2.800 + 650 + 585 + 368 + 178 + 178) : 6 = 793,1$$

Y la mediana de los sueldos es:

Mediana = 
$$(585 + 368) : 2 = 476,5$$

En este caso, la mediana está representando mejor los salarios de la empresa, que el promedio. Esto ocurre porque uno de los sueldos está muy por encima de los otros y eleva la media haciendo que pierda representatividad respecto al grueso de la población.

Sin embargo, alguien con salario "mediano" sabe que hay tanta gente que gana más dinero que él, como que gana menos.

El número de urgencias atendidas en un centro de salud durante los 30 días del mes de abril fueron:

a) Construya la tabla de distribución de frecuencia y el gráfico de barras comparadas.





b) Determine cuál es, en promedio, el número de atenciones de urgencia en este centro hospitalario.



c) Determine la mediana del número de urgencias y la moda.



- d) A su juicio, ¿cuál de estas medidas de tendencia central representa mejor el flujo en esta urgencia?
- 2 Se escogió un curso de cuarto básico, con un total de 25 estudiantes, para realizar una encuesta acerca de un programa televisivo y se les pidió que lo calificaran del 1 al 5, siendo:

Estos fueron los resultados:



a) Determine la media, la moda y la mediana.



b) ¿Cuál de estas medidas de tendencia representa mejor la opinión de la mayoría de los estudiantes?



### **EVALUACIÓN**

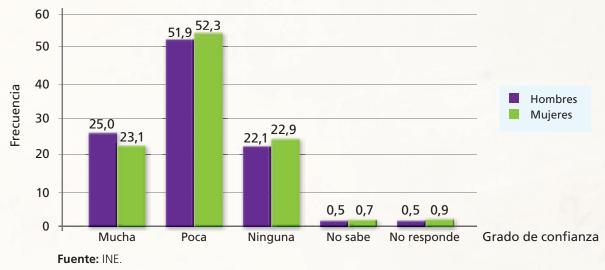
### Puntaje total Evaluación 31 puntos

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), en caso de ser falsa, explique por qué: (2 puntos c/u).

Afirmación	V	F	Justificación
La moda de un conjunto de datos es el valor que se ubica al centro de la distribución.			
La frecuencia de un evento es el número de veces que ocurre.			
El promedio de un conjunto de datos es el número que más veces se repite.			
El promedio de un conjunto de datos es siempre mayor que la moda.			
La moda de un conjunto de datos es un valor que se ubica entre el menor y el mayor de los datos.			

Un grupo de personas de la región metropolitana, fueron entrevistadas para medir la confianza que tiene la población en los medicamentos homeopáticos.

La pregunta fue: ¿Cuánta confianza tiene usted en los medicamentos homeopáticos? Los datos se han representado en el siguiente gráfico de barras comparadas.



a) ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados dice no tener ningún grado de confianza en este tipo de medicamentos? (1 punto).

177



b) ¿Qué porcentaje de los entrevistados manifiesta mucha confianza? (1 puntos).

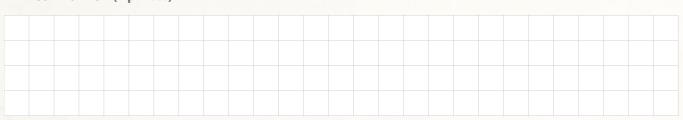
c) Entre los hombres entrevistados, ¿cuál es la moda de confianza en este tipo de medicamentos? (2 puntos).



d) Si fueron 3.000 los entrevistados, ¿cuántas personas, en promedio, o no saben o no responden? (2 puntos).

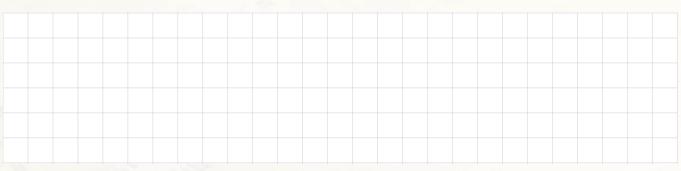


e) ¿Cuál es, en promedio, el porcentaje de personas que tienen poca o ningún grado de confianza? (2 puntos).



f) ¿Qué nombre le pondría a este gráfico? (1 punto).

g) Construya una tabla que muestre los mismos datos que registra el gráfico. (3 puntos).



178

Módulo 4 Tratamiento de información



3 Un estudio acerca del porcentaje de personas entre 12 y 65 años que usan el computador e Internet, en los países de la unión europea, ha mostrado los resultados que se registran en la siguiente tabla de frecuencias:

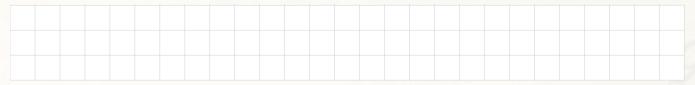
País	Han utilizado el computador en los 3 últimos meses	Han utilizado internet en los 3 últimos meses	
Bélgica	70	67	63
Bulgaria	35	31	28
República Checa	55	49	42
Dinamarca	84	81	76
Alemania	78	72	64
Estonia	65	64	59
Grecia	40	33	28
España	61	57	49
Francia	69	64	57
Irlanda	62	57	51
Italia	43	38	34
Finlandia	81	79	75
Suecia	88	80	75
Reino Unido	78	72	65
Portugal	46	40	35

Fuente: Eurostat.

(España; datos de 2008. Las celdas con cifras superiores a la media comunitaria están destacadas en color).

De acuerdo a los datos de la tabla:

a) ¿Cuál es la moda, la mediana y el promedio del porcentaje de personas, en la unión europea, que han usado Internet en los últimos 3 meses? (3 puntos).



b) ¿En qué país de los registrados se ha utilizado con mayor frecuencia el computador los últimos 3 meses? (2 puntos).

c) Con respecto a los usuarios frecuentes de internet, ¿cuál es la moda, la mediana y el promedio? Y ¿cuál de estas medidas de tendencia considera usted que refleja mejor la situación que se muestra en la tabla? (4 puntos).



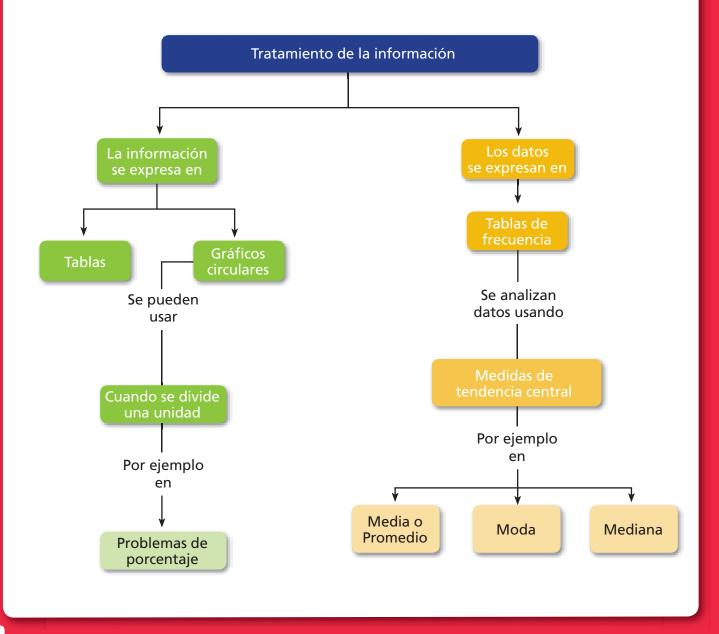
### **SÍNTESIS MÓDULO 4**

En este módulo, hemos estudiado distintos elementos y procedimientos que nos permiten acceder a la información disponible en los distintos medios y que, en definitiva, nos permite tener una opinión fundada y actualizada de la realidad.

En la unidad 1, hemos aprendido a leer, construir e interpretar tablas de datos y gráficos circulares, aplicados a problemas concretos que modelan situaciones de la vida real.

En la unidad 2, trabajamos tres medidas de tendencia central, moda, mediana y media. Aprendimos a determinarlas y a interpretarlas en el análisis de información contenida en un conjunto de datos.

Lo aprendido en este módulo lo sintetizamos con los siguientes esquemas:



180

Módulo 4 Tratamiento de información